

**Сања М. Маричић\***

Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет, Ужице

**Јелена Р. Стојкановић\***

Гимназија „Јосиф Панчић”, Бајина Башта

## **ТАЧКАСТА И КВАДРАТНА МРЕЖА У НАСТАВИ ГЕОМЕТРИЈЕ У МЛАЂИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ\*\***

**Апстракт:** Рад има за циљ да истакне предност коришћења тачкасте и квадратне мреже као помоћног алата у визуализацији при усвајању основних појмова геометрије и решавању задатака из геометрије у млађим разредима основне школе. Визуализација је важан део когнитивног процеса у математици, а квадратна и тачкаста мрежа помажу ученицима да математички проблем визуализују и због тога су значајне. Иако се користе у сваком од прва четири разреда основне школе при обради наставних тема из геометрије ни ученици, а ни наставници не користе њихове предности у довољној мери. Предност њиховог коришћења потврдили смо истраживањем које је спроведено са ученицима другог и четвртог разреда из две основне школе. Анализом добијених резултата тестирањем закључили смо да коришћење квадратне мреже повећава успешност решавања проблема. С обзиром на то да се у настави математике користе свеске са квадратном мрежом треба је искористити посебно у области геометрије. Ученици немају навику да сами представе геометријски проблем сликом па би учитељи требало на томе да инсистирају.

**Кључне речи:** визуализација, квадратна мрежа, тачкаста мрежа, геотабла, геометрија.

### **УВОД**

Очигледност, перцепција и визуализација сматрају се основом учења на млађем узрасту и представљају важне услове за стварање исправне менталне

---

\* sanjamaricic10@gmail.com

\* stojkanovic77@mts.rs

\*\* Рад је настао у оквиру пројекта ОИ 179026 „Настава и учење: проблеми, циљеви и перспективе”, чији је носилац Педагошки факултет у Ужицу, а финансијски подржава Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

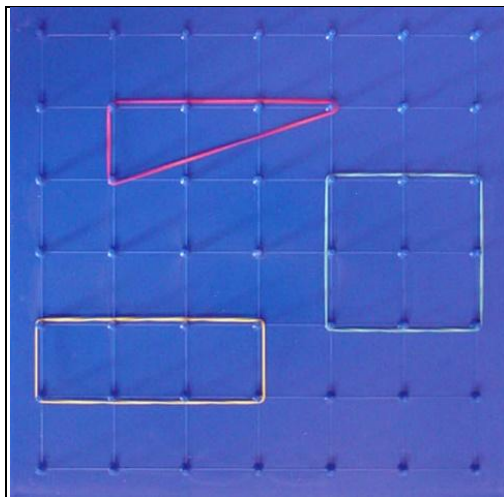
слике у процесу формирања математичких појмова (Guncaga & Žilková, 2019). Управо је из тих разлога улога визуализације у процесу математичког образовања предмет бројних истраживачких радова. Аутори истичу да она обезбеђује да се учење одвија кроз активност ученика, да представља моћан алат за формирање математичких појмова и њихових значења (Arcavi, 2003; Bishop, 1989; Stylianou & Silver, 2004), али и средство које омогућава сусрет са мноштвом нових информација и појмова у процесу учења (Rösken & Rolka, 2006: 458).

Визуализација је „способност, процес и производ стварања, тумачења, употребе и рефлексije слика, дијаграма, у нашем уму, на папиру или помоћу технолошких алата, у сврху приказивања и преношења информација, размишљања и развијања од раније непознатих идеја и унапређивања разумевања” (Arcavi, 2003: 26). Она помаже ученицима да створе властити ментални модел, а њена ефикасност огледа се у начину и степену ангажовања ученика при активностима које су више од самог гледања (Костић, Секулић, Станковић-Ђорђевић, 2017). Фишбајн сматра да уз слике размишљамо лакше, јер смо навикли да размишљамо о материјалним објектима (Fischbein, 1977). У процесу учења визуелне репрезентације се од помоћних, илустративних средстава претварају у водећа, продуктивна когнитивна средства (Далингер и Князева, 2004).

Према *Принципима и стандардима за школску математику* (NCTM) „основ за математички развој код детета успоставља се у раним годинама” (Seefeldt & Wasik, 2006: 249). Да би тај развој био ефикасан неопходно је да деца „имају различите материјале за манипулацију, конструкцију, слагање, истраживање, како би све то водило ка конструкцији математичког знања” (Boggan, Harper, Whitmire, 2010: 1). Улога визуализације у процесу учења код ученика млађег школског узраста посебно долази до изражаја, пре свега због карактеристика мишљења. Било који математички садржај, као предмет поучавања/учења, захтева визуализацију, јер се дете у овом узрасту налази на стадијуму конкретних операција, и све његове активности везане су за очигледност и практичне акције на моделима и алатима. У овом раду желимо да скренемо пажњу на улогу и значај квадратне мреже, као помоћног алата у процесу учења садржаја геометрије и решавању задатака из геометрије у млађим разредима основне школе.

Квадратна мрежа је мрежа која се добија када се паралелне вертикалне линије на једнаком међусобном растојању пресеку са паралелним хоризонталним линијама на истом том растојању. Раван се прекрива подударним квадратима јер су вертикалне линије ортогоналне са хоризонталним, а растојања међу линијама су једнака. Постављањем тачака у темена добијених квадрата и брисањем линија добија се тачкаста мрежа. Претеча квадратне мреже је геотабла, коју је 1952. године конструисао египатски математичар Калев Гатењо (Caleb Gattegno, 1911–1988). Геотабла је дрвена или пластична табла са клиновима који су распоређени у тачкасту мрежу и око којих је могуће растезати еластичне гумице (Слика 1). Традиционална геотабла израђена је од шпер-

плоче и ексера, а данас се израђује од пластике и има је у различитим величинама и бојама. Поред класичних геотабли постоје и изометричке геотабле код којих су клинови распоређени у темена ромбова, као и кружне геотабле код којих су клинови кружно распоређени.



Слика 1. Геотабла

Представе о геометријским објектима код деце креирају се у уму преко визуелних и чулних слика. Геотабла ученицима омогућава визуализацију и тако им даје могућност да „раде“ геометрију, па се њено коришћење препоручује код ученика млађих разреда основне школе да савладају и разумеју геометријске појмове, њихове особине, као и међусобне односе (Ћишмешија, Soucie & Svedrec, 2012). Овај дидактички алат могу користити чак и мала деца као и деца која имају потешкоћа при цртању геометријских облика, а његова посебна вредност огледа се у томе што помаже деци да истражују својства равних фигура (Scandrett, 2008). Коришћење геотабле могуће је и у старијим разредима основне, као и у средњој школи при обради тема из еуклидске геометрије што се може видети у раду Сибије (Sibiya, 2020).

Оправдање за коришћење квадратне мреже, као средства које треба да обезбеди визуализацију у процесу учења геометрије у млађим разредима основне школе проналазимо и у теоријама развоја геометријског мишљења. Пјер Ван Хиле (Pierre Van Hiele, 1986) уочио је и дефинисао пет различитих нивоа геометријског разумевања: визуализација, анализа, неформална дедукција, дедукција и строгост. Сваки од издвојених нивоа има сопствене карактеристичне изразе на основу којих идентификујемо ниво геометријског размишљања код детета (Guncaga & Žilková, 2019; Vlasnović i Cindrić, 2014; Ђокић и Зељић, 2017; Ђокић, 2013). Ако посматрамо развој геометријског мишљења

код ученика млађих разреда основне школе онда се можемо задржати на прва три нивоа (Vlasnović i Cindrić, 2014). Дечје закључивање на прва три нивоа захтева физичке објекте, инструменте или слике које помажу при решавању задатака и организовању размишљања (Ђокић, 2013). То значи да је неопходно на било који начин обезбедити конкретност и очигледност у процесу учења.

Дувал (Duval, 1998) у развоју геометријског размишљања учачава и издваја три типа когнитивних процеса који морају бити подржани: визуализација, конструкција и аргументација. Ови процеси могу се појавити и развијати одвојено, али, такође су, уско повезани и по Дувалу, когнитивно неопходни за стицање геометријског знања (Guncaga & Žilková, 2019; Ђокић, 2013). Коришћење квадратне или тачкасте мреже, при представљању геометријских фигура и при решавању проблемских задатака из геометрије подржава сва три наведена когнитивна процеса.

Иста становишта, када је у питању учење геометрије, налазимо и код Фројдентала (Freudenthal, 1973), који се залагао за повезивање математике са реалним ситуацијама, учење математике у контексту блиском ученику. Аутор посебно истиче важност процеса у ком се елементи контекста мењају у геометријске објекте кроз процес математизације – хоризонталне и вертикалне. Хоризонталном математизацијом ученик долази до неформалног математичког модела, а решавањем, упоређивањем, сагледавањем комплексности постављеног проблема ученик, уз помоћ вертикалне математизације, долази до математичког решења (Ђокић, 2013). Процес хоризонталне математизације одвија се на конкретним моделима, средствима, алатима којима се обезбеђује визуализација, односно трансформација реалног проблема у математички на квадратној мрежи, а процес вертикалне математизације представљање релација формулама и учачавање правилности.

Према мишљењу Џонса коришћење квадратне мреже, као инструкционог материјала, доприноси да се ученици ангажују у активностима у којима формирају математичке појмове и уопште решавају проблеме (Jones, 2002). Истраживачи посебно истичу важност квадратне мреже у формирању геометријских облика, упознавање њихових међусобних односа (Furner & Marinas, 2011; Scandrett, 2008; Sibiya, 2019), упознања и израчунавања обима и површине фигура (Freire, Rodrigues, Aquino, Soares, Gois, Viana, 2018), у усвајању садржаја алгебре (Abonyi & Eze, 2006; Scandrett, 2008), као и подстицању активног учења садржаја из геометрије и мотивације ученика (Rahmiati, 2016; Sani & Salahudeen, 2016). Посебну вредност оваквих инструкционих материјала истраживачи, пре свега, посматрају кроз њихову улогу у подстицању активности ученика у процесу учења садржаја геометрије, јер ова средства обезбеђују извођење конкретних операција на њима, манипулацију, што доприноси дубљем разумевању, у односу на примену образаца и формула.

Коришћењем квадратне и тачкасте мреже ученик може доћи до слике и са више разумевања упоредити, груписати, сместити у класе геометријске фигуре по једној или више задатих особина. Може успоставити и разумети везе и односе међу геометријским објектима, идејама и појмовима и истражити и уочити неке правилности (Ћишмешија, Soucie & Svedrec, 2012). Све ово резултира подизањем нивоа геометријског размишљања са нивоа визуализације на ниво неформалне дедукције.

Деца млађег школског узраста уз повезивање тачака у квадратној мрежи могу визуализовати различите геометријске појмове и тако формирати појмове. Квадратну и тачкасту мрежу можемо посматрати и као један облик „scaffold” алата за учење геометрије, како Виготски назива ову потпору у учењу. Уз њихову помоћ проблем се визуализује и лакше повезује са познатим геометријским појмовима.

Квадратна и тачкаста мрежа могу помоћи у многим активностима предвиђеним у настави геометрије у основној школи као што су цртање дужи, упоређивање дужи, мерење дужи, цртање правог угла, нормалних и паралелних правих, квадрата, правоугаоника, мерење обима фигура и њихових површина, цртање симетричних фигура итд. Увидом у програм наставе и учења математике за млађе разреде основне школе приметимо да се у сваком разреду квадратна мрежа промовише као дидактички алат и учитељима у упутству за остваривање програма наставе и учења сугерише на њено коришћење при обради садржаја из геометрије. У првом разреду при обради теме *Линије* као један од примера активности за остваривање исхода у овој области наводи се следеће: „цртање слике или доцртавање започете слике у квадратној или тачкастој мрежи према датом упутству” (*Правилник о програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања*, 2017: 27).

У другом разреду, као један од исхода, наводи се да ће ученик бити у стању да нацрта правоугаоник и квадрат на квадратној мрежи и тачкастој мрежи (*Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања*, 2018). У области *Геометријска тела и фигуре* ученици се упознају са појмом дужине дужи, мерењем дужине и упоређивањем тако што цртају фигуре пратећи линије квадратне мреже, односно спајањем тачака на тачкастој мрежи и бројећи квадратиће односно тачкице. Упоредјујући дужине страница правоугаоника и квадрата долазе до важних особина тих фигура на основу којих их препознају на слици.

Квадратна мрежа се користи и при цртању ваљка, коцке и квадра. Слика наведених тела је започета у мрежи, а ученик треба да је доврши користећи једнакост дужина одговарајућих ивица. На овај начин ученик упознаје и својства наведених облика. Посебно су занимљиви задаци у којима се од ученика тражи да од датих фигура нацртаних у квадратној мрежи састави правоугаоник или квадрат. У таквим задацима очигледна је помоћ коју пружа цртеж у квадратној мрежи јер ученик лакше повезује делове уочавајући подударне дужи.

*Правилником о програму наставе и учења за трећи разред основне школе* (2019) предвиђено је да се тачкаста и квадратна мрежа користе у увођењу појма осне симетрије и осносиметричног пресликавања. Имајући у виду да се осна симетрија и транслација као пресликавања равни обрађују у старијим разредима основне школе уз конструкцију прибором, помоћ квадратне и тачкасте мреже при цртању и уочавању осносиметричних и транслираних фигура у млађим разредима је очигледна. Свеска „са квадратићима” олакшава цртање подударних дужи као и правих углова, паралелних и ортогоналних правих па самим тим и подударних фигура и тела. У уџбенику за трећи разред основне школе квадратна мрежа се користи при дефинисању нормалних и паралелних правих. Ученици трећег разреда први пут се сусрећу са појмом обима фигуре, који се може објаснити пребројавањем тачака у тачкастој, односно квадрата у квадратној мрежи, кроз које пролази гранична линија фигуре. У четвртном разреду акценат је на квадрату и коцки, „цртање у квадратној или тачкастој мрежи погодно је да се ученицима предоче разни начини представљања квадрата и коцке у зависности од правца посматрања” (*Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања*, 2019: 41) као и представљање мреже квадрата и коцке. Кроз идеју поплочавања правоугаоника подударним квадратима долази се до генерализације и обрасца за израчунавање површине правоугаоника. Помоћу квадратне и тачкасте мреже могу се поредити површине фигура пребројавањем квадрата односно тачака које фигура прекрива. Квадрати квадратне мреже користе се и за дефинисање појма квадратних јединица мере.

Поред широке примене у редовној настави геометрије квадратна и тачкаста мрежа користе се и у задацима међународног тестирања TIMSS. Иако се представници држава учесница тестирања договарају око заједничког програмског оквира постоје разлике у програму TIMSS и наставном програму математике у Србији. На пример у области *Геометрија* тестира се употреба неформалног координатног система за одређивање положаја тачке у равни. За приказ тачака у координатном систему у TIMSS тестовима користи се квадратна мрежа, тако да, иако се са координатним системом не сусрећу у млађим разредима основне школе, ученици успевају да користећи особине квадратне мреже дођу до тачног решења. Резултати тестирања показали су да „наши ученици владају и оним математичким садржајима које нису учили у редовном систему” (Станојевић и Милинковић, 2013: 26). Наведено упућује на закључак да је веома битан начин на који им се задатак постави и алат који им се за решавање понуди.

Манипулација додиром и виртуелна манипулација могу помоћи ученицима да разумеју геометријске појмове. Манипулативне активности усмерене су ка томе да ученицима дају искуство различитих облика у равни у различитим положајима и различитим величинама (Guncaga & Žilková, 2019). То потврђују и претходно наведене теорије, а како је ученицима квадратна мрежа у свесци увек при руци, треба искористити њену помоћ при визуализацији геометријских садржаја.

Из наведених теоријских когнитивних модела, очигледно је да визуализација одређује и креирање исправних геометријских појмова. Стога је важно применити исправне, ефикасне и прикладне изборе визуелних модела како би се приступило формирању геометријских појмова у оквиру наставе геометрије (Guncaga & Žilková, 2019). У тачкастој мрежи је врло лако приказати геометријске фигуре у различитим положајима и уочити особине које се не мењају променом положаја посматране фигуре, а за истраживање је одабрана квадратна мрежа као помоћ при представљању геометријских фигура и одређивању њихових површина. Предност употребе квадратне мреже у раду са ученицима у учењу геометрије оправдава и њена доступност, јер свеске које ученици користе у раду садрже квадратну мрежу.

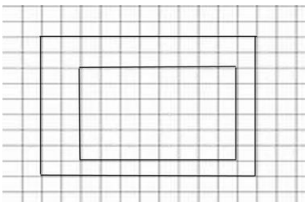
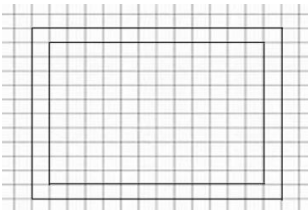
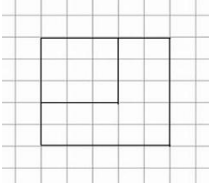
Планирање наставе и учења геометрије у млађим разредима основне школе где се често помиње и користи тачкаста или квадратна мрежа дало је идеју за истраживање да ли је ученици знају користити као геометријски алат при решавању задатака. У истраживању предност смо дали квадратној мрежи, јер је присутнија у уџбеницима и радним свескама као и доступнија ученицима због коришћења свезака „на квадратиће” на часовима математике. Овај рад има за циљ да истакне предности коришћења квадратне мреже као помоћног алата при упознавању ученика са геометријским појмовима, њиховим особинама и решавању проблемских задатака из геометрије. Наша претпоставка је да, иако ученици за математику користе свеске са квадратном мрежом ипак не користе довољно њене предности и овај алат у учењу и решавању проблема из геометрије. Овим истраживањем желимо показати да се задаци из геометрије успешније решавају уз помоћ визуелног приказа на квадратној мрежи и тиме скренемо пажњу учитељима да на томе треба инсистирати у процесу учења како би се постигле жељене компетенције из области геометрије.

## МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА

Узорак за истраживања одабран је из популације ученика који су школске 2020/2021. године похађали други и четврти разред основне школе. Истраживање је спроведено у две основне школе на територији општине Бајина Башта. Узорак истраживања чинило је 253 ученика, од којих 131 ученик четвртог разреда (61 ученик из једне школе и 70 из друге) и 122 ученика другог разреда (66 ученика из једне школе и 56 из друге).

Истраживање је реализовано техником тестирања. За инструмент истраживања коришћен је нестандардизовани тест који се састојао од три задатка и који је направљен за потребе истраживања. Задаци у тесту креирани су према задацима из радне свеске за математику за четврти разред основне школе аутора Поповић, Вуловић, Јовановић, Николић (2017), тако што су постојећи задаци модификовани. Задаци коришћени у истраживању представљени су у Табели 1.

Табела 1. Задаци коришћени у истраживању

Други разред	Четврти разред
<p>1. Плац облика правоугаоника има странице дужине 9 и 11 квадратића у квадратној мрежи. На том плацу налази се кућа, правоугаоник страница дужине 6 и 8 квадратића. Израчунај колико је квадратића остало за двориште.</p> 	<p>1. Плац облика правоугаоника има димензије 9 m и 11 m. На том плацу налази се кућа чије су димензије 6m и 8m. Израчунај колика је површина дворишта.</p>
<p>2. Око базена облика правоугаоника страница дужине 10 и 12 квадратића налази се бетонска стаза ширине једног квадратића. Колико је квадратића прекрила стаза?</p> 	<p>2. Око базена димензија 10m и 12m налази се бетонска стаза ширине 1m. Колика је површина стазе?</p>
<p>3. Квадрат прекрива 9 квадратића у квадратној мрежи. Ако се страница квадрата увећа за дужину 2 квадратића, колико ће још квадратића бити прекривено новим квадратом?</p> 	<p>3. Површина квадрата је <math>9 \text{ cm}^2</math>. Ако се страница квадрата увећа за 2cm за колико ће се увећати површина квадрата?</p>



Сви задаци у тесту садржали су исти захтев – одређивање површине квадрата и правоугаоника. Ученици четвртог разреда два пута су решавали задатак: прво користећи формуле за одређивање површине квадрата и правоугаоника које су научили, управо, у четвртом разреду, а потом задатке са датим моделом квадратне мреже који је требало користити при решавању. Ученици другог разреда решавали су иста три задатка уз дат модел квадратне мреже, али је термин „одређивање површине” замењен са одређивањем „броја квадратних” у квадратној мрежи.

С обзиром на то да су исте задатке решавали ученици другог разреда којима још увек није познат појам површине и ученици четвртог разреда, најпре без, а потом и уз помоћ квадратне мреже поставили смо следећу хипотезу: Представљање проблемских задатака из геометрије у квадратној мрежи могуће је и у другом разреду, а помаже при уочавању веза и правила међу геометријским фигурама и доводи до успешнијег решавања проблема. Добијени резултати истраживања квантитативно су изражени, а потом квалитативном анализом интерпретирани.

### Резултати истраживања и њихова дискусија

Првим задатком на тесту желели смо да утврдимо ефекте коришћења квадратне мреже у решавању задатка. Ученици другог и четвртог разреда имали су идентичан захтев – да израчунају површину дела дворишта. Ученици другог разреда нису формирали појам површине, већ су задатак решавали посредно – пребројавајући квадратиће. Добијени резултати показују да је 70 или 57,4% ученика другог разреда успешно решило овај задатак приказан на квадратној мрежи (Табела 2). Исти овај задатак, код ученика четвртог разреда захтевао је израчунавање површине која се добије кад се од површине већег правоугаоника (плаца) одузме површина мањег (куће). Без коришћења мреже тачан резултат је добило 79 ученика што је 60,3% укупног броја ученика четвртог разреда. Ови ученици су користили формуле за површину и дошли до тачног решења. Када су исти ученици уз понуђену квадратну мрежу као помоћни алат и инструкцију да нацртају плац и кућу као одговарајуће фигуре решавали исти проблем број ученика који су добили тачну површину се повећао за још 5 ученика односно на 84 (64,1%).

Табела 2. Број ученика који су успешно решили задатке

	1. задатак		2. задатак		3. задатак		Укупно
	f	%	f	%	f	%	
Други разред	70	57,4	45	36,9	46	37,7	122
Четврти разред (без квадратне мреже)	79	60,3	18	13,7	46	35,1	131
Четврти разред (са квадратном мрежом)	84	64,1	36	27,5	56	42,7	131

Други задатак је, по броју тачних решења, био најтежи и ученицима другог и ученицима четвртог разреда. Ученици другог разреда имали су захтев да одреде број квадратића који прекрива стаза око датог правоугаоника који представља базен. Стаза има ширину једног квадратића, тако да је око правоугаоног базена требало доцртати стазу, а онда пребројати квадратиће. Ученици који су представили проблем у квадратној мрежи су и добили тачан број, а њих је 45 или 36,9%.

Код ученика четвртог разреда овај задатак без квадратне мреже је тачно урадило само 18 ученика, у процентима само 13,7%. До површине су покушавали доћи формулама без икаквог визуелног приказа тако да је само 17 њих дошло до тачног резултата и један ученик је за овај задатак имао цртеж поред резултата цртан слободном руком. Када им је понуђена помоћ квадратне мреже и захтевано да представе дати задатак на квадратној мрежи успешност ученика у решавању задатака се удвостручила на 36 (27,5%). Ако упоредимо овај број ученика са бројем ученика другог разреда који су успешно решили исти проблем не можемо бити задовољни. Чињеница је да ученици четвртог разреда користе визуелну репрезентацију приликом решавања задатка само када се то од њих тражи у задатку, да чак велики број њих није оспособљен да визуализује проблем, али и да велики број ученика није правилно формирао појам површине фигуре, већ је само меморисао готове формуле. Задатак истог захтева под називом „Шивење столњака”, у ком се до резултата долази на исти начин, односно има исти проблем у основи наводи и Ђокић као проблем који велики број ученика неуспешно решава (Ђокић, 2013: 250).

Занимљиво је да су ученици другог разреда били успешнији у решавању овог задатка. Разлог може бити тај што се они више служе перцепцијом као и квадратном мрежом, а ученици четвртог разреда одмах посежу за формулом за површину заборављајући начин на који су до ње дошли и шта она у ствари представља. Добијени резултат потврђује значај квадратне мреже као средства које доприноси разумевању појма површине фигуре и олакшава решавање проблема. Из тих разлога учитељи треба што више да користе квадратну мрежу у процесу учења и моделовања у процесу решавања задатака. Чим ученици у другом разреду савладају цртање квадрата и правоугаоника у квадратној мрежи треба им задавати што више задатака у којима треба сами да нацртају слику, а не да добијају готове илустрације. Како наводи Ђокић (Ђокић, 2013) ученици се морају подстицати на замишљање геометријских објеката и представљање проблема сликом. Управо то и потврђује овај задатак, јер су га успешно урадили само ученици који су умели да проблем представе одговарајућим цртежом. Само тачан визуелни приказ их је довео до решења.

Трећи задатак у тесту захтевао од ученика уочавање промене површине квадрата након повећања његове дужине. Од укупног броја ученика другог разреда 46 (37,7%) је тачно урадио овај задатак исправним цртежом у квадратној мрежи. Успешно решавање овог задатка захтевало је добро познавање осо-

бина квадрата – да су му све четири странице једнаке и долазак до закључка да квадрат који прекрива девет квадратића у мрежи мора имати страницу дужине три квадратића. Ако 38% ученика другог разреда који се први пут срећу са оваквим захтевима добију тачно решење, претпостављамо да се решавањем сличних задатака уз инструкције учитеља тај проценат може и повећати.

Код ученика четвртог разреда, који су овај задатак решавали користећи формулу за површину квадрата и без квадратне мреже и било каквог цртежа, 46 (35,1%) њих је успешно решило задатак, што је процентуално слабије од ученика другог разреда. Они су приликом решавања задатка одређивали страницу квадрата из дате површине, увећали је за два и израчунавали површину већег квадрата. Тражену површину су добили као разлику површина већег и мањег квадрата. Када су поново радили исти задатак уз инструкцију да прикажу проблем у датој квадратној мрежи, број ученика који су успешно решили овај задатак је повећан на 56 (42,7%). Видимо да и приликом решавања и овог задатка ученици другог разреда, који нису формирали појам површине фигуре, успешно решавају задатке истог захтева, као и ученици четвртог разреда, који су формирали овај појам. Добијени резултати још једном потврђују улогу и ефекте коришћења квадратне мреже у учењу садржаја математике и решавању проблема који се могу моделовати на њој.

## ЗАКЉУЧАК

Анализирајући резултате спроведеног истраживања долазимо до закључка да је постављена хипотеза потврђена: *Ученици другог разреда уз инструкције могу представити геометријске проблеме у квадратној мрежи и помоћу ње доћи до решења, те су и задаци са теста који је захтевао коришћење квадратне мреже успешније решени од оних решаваних без коришћења квадратне мреже.* Ученици другог разреда су, иако не знајући формулу за израчунавање површине уз квадратну мрежу, успели да је израчунају, пребројавањем квадратића, успешније него ученици четвртог разреда којима је формула за површину позната. Пошто се појам површине правоугаоника уводи уз идеју поплочавања правоугаоника подударним квадратима, можемо приметити да ученици другог разреда који су савладали представљање квадрата и правоугаоника у квадратној мрежи пребројавањем прекривених квадратића, долазе до површине. Како се у другом разреду учи представљање квадрата и правоугаоника у квадратној мрежи, треба инсистирати на цртежу уз сваки задатак из геометрије са поменутиим фигурама. Тако ће ученици бити спремнији за усвајање нових знања из геометрије у старијим разредима основне школе. Ово истраживање нам је показало да је неопходно ученике четвртог разреда враћати на полазну идеју којом се долази до формуле за површину правоугаоника и захтевати визуелно представљање геометријског проблема. Не треба инсистирати на усвајању готове формуле, већ на разумевању самог поступка којим смо до формуле дошли.

Добијени резултати потврђују да визуализација геометријских појмова и процедура представља важан елемент у процесу формирања геометријских појмова (Guncaga & Žilková, 2019). Треба имати у виду да „различити облици репрезентације немају улогу алата, који одређеном процедуром воде до одговора, већ се посматрају као средства за решавање проблема са разумевањем, јер омогућавају различите приступе у стварању математичких идеја, које су уграђене у математички проблем” (Ракоњац и Миљковић, 2019: 20). Анализирајући различите теорије о развоју геометријског размишљања код деце и резултата спроведеног истраживања, уочено је да квадратна мрежа може да помогне при визуализацији и решавању проблемских задатака из геометрије.

У настави геометрије у основној школи посебну улогу имају дидактичка средства која нам пружају могућност различитих репрезентација геометријских појмова. Анализирајући више студија Ђокић (2013) наводи да већина верификује употребу манипулативног као покретача у процесу конструкције знања, јер манипулисање објектима даје ученицима могућност да провере своје идеје, испитају их и размишљају о њима, као и да их модификују. Овај физички приступ у геометрији који је примећен у уџбеницима САД-а, Јапана и Велике Британије наглашава ученичка интересовања, помаже ученицима у уопштавањима и успостављању нових хипотеза и води до формирања нових односа (Ђокић, 2013). У нашим уџбеницима аутори ретко предлажу активности са манипулативним дидактичким средствима (Миљковић и Мићић, 2008). Коришћење геотабле као манипулативног дидактичког средства заснованог на тачкастој мрежи ученицима ће омогућити да са више разумевања групишу, упоређују и класификују геометријске фигуре према једном или више задатих критеријума, успостављају и разумеју везе и односе између геометријских објеката и тако стварају и истражују претпоставке и правилности међу тим објектима. Те активности ће резултирати изградњом нових математичких знања кроз решавање проблема (Џиџмешија, Soucie, Svedrec, 2012).

Како се квадратна и тачкаста мрежа појављују у настави геометрије у сва четири разреда основне школе треба подстицати ученике да их користе и упознати их са њиховим могућностима. Ову чињеницу треба, пре свега, да имају у виду учитељи, који ће оспособити ученике да знања стичу користећи квадратну и тачкасту мрежу у процесу стицања представа и формирања геометријских појмова и упознавања њихових особина. Квадратна и тачкаста мрежа представљају вредан алат који је, пре свега, доступан свим ученицима, а са друге стране обезбеђује визуализацију и очигледно представљање, што све води ка добром разумевању и учењу у настави геометрије.

## Литература

- Abonyi, O. & Eze, A. (2006). Effect of Geoboard on junior secondary school students' achievement in geometry. *Ebonyi State University Journal of Education (EBJE)*, 4, 243–250.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.
- Bishop, A. (1989). Review of research in visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7–16.
- Boggan, M., Harper, S. & Whitmire, A. (2010). Using Manipulatives to Teach Elementary Mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies*, 3, 1–6.
- Vlasnović, H. i Cindrić, M. (2014). Razumevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema Van Hileovoj teoriji. *Školski vjesnik*, 63(1–2), 37–51.
- Guncaga, J. & Žilková, K. (2019). Visualisation as a Method for the Development of the Term Rectangle for Pupils in Primary School. *European Journal of Contemporary Education*, 8(1), 52–68.
- Далингер, В. А. и Князева О. О. (2004). *Когнитивно-визуальный подход к обучению математике*. Омск: ОмГПУ.
- Duval, R. (1998). Geometry from the cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21<sup>st</sup> Century, an ICMI Study* (37–52). Kluwer Academic Publishers.
- Ђокић, О. (2013). *Реално окружење у почетној настави геометрије*. (Необјављена докторска дисертација). Београд: Учитељски факултет.
- Ђокић, О. и Зелић, М. (2017). Теорије развоја геометријског мишљења према Ван Хилу, Фишбајну и Удемон-Кузникау. *Теме*, 41(3), 623–637.
- Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (ed.): *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (121–139). London: Routledge.
- Костић, В. Секулић, Т. и Станковић-Ђорђевић, М. (2014). Формирање почетних математичких појмова – од визуелног до симболичког. У Д. Видановић (ур.): *Холистички приступ у предшколској педагогији – теорија и пракса*, Зборник радова другог стручно-научног скупа са међународним учешћем ХОЛИПРИ 2014 (188–199). Пирот: Висока школа струковних студија за образовање васпитача.
- Милинковић, Ј. и Мићић, В. (2008). Улога дидактичких средстава у основношколској геометрији. У М. Егерић (ур.): *Методички аспекти наставе математике* (33–37). Јагодина: Педагошки факултет.
- Правилник о програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања* (2017). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије, бр. 10/2017-1.

- Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања* (2018). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије, бр. 16/2018-47.
- Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања* (2019). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије, бр. 5/2019-6.
- Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања* (2019). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије, бр. 11/2019-1.
- Ракоњац, М. и Милинковић, Ј. (2019). Утицај примене различитих репрезентација појмова и процедура на концептуално разумевање. *Зборник радова Педагошког факултета у Ужицу*, 22(21), 207–226.
- Rahmiati, M. (2016). The attempt to improve mathematics learning motivation using the geoboard (Spiked Board). Among Grade II Elementary School Students. *Global Journal of Business and Social Science Review*, 4(3), 74–78.
- Rösken, B. & Rolka, K. (2006). A picture is worth a 1000 words – the role of visualization in mathematics learning. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (eds.). *Proceedings 30<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 457–464. Prague: PME.
- Sani, S. & Salahudeen, B. (2016). Effects of Geoboard and geographical globe on senior secondary school students' performance in mathematics in Kaduna state. *Journal of Science, Technology & Education*, 4(1), 140–148.
- Sibiya, M. R. (2019). The effect of Geoboard use on learners' motivation for learning of Geometry theorems. *International Journal of Sciences and Research*, 75(6), 71–85, <https://doi.org/10.21506/j.ponte.2019.6.14>.
- Sibiya, M. R. (2020). A Reconsideration of the Effectiveness of Using Geoboard in Teaching Euclidean Geometry. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(9), 1–10, <https://doi.org/10.29333/ejmste/8360>.
- Станојевић, Д. и Милинковић, Ј. (2013). *ТИМСС 2011-МАТЕМАТИКА преглед наставног програма и збирка задатака за 4. разред*. Београд: Институт за педагошка истраживања.
- Seefeldt, C. & Wasik, B. A. (2006). *Early education: three-, four-, and five-year-olds go to School* (2<sup>nd</sup> ed.). Upper Saddle River: Pearson Education.
- Scandrett, H. (2008). Using Geoboards in Primary Mathematics: Going... Going... Gone?. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 13(2), 29–32.
- Stylianou, D. A. & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(4), 353–387.
- Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 153–165.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Netherlands: Reidel Publishing Company, Dordrecht–Holland.

- Freire, A. F., Rodrigues, F. S., Aquino, M. R., Soares, M. V., Gois, D. D. & Viana, J. D. (2018). The use of the Geoboard in teaching Geometry: calculating area and perimeter. *Multidisciplinary Core scientific journal of knowledge*, 3, 119–135.
- Furner, J. M. & Marinas, C. A. (2011). *Geoboards to GeoGebra: Moving from the concrete to the abstract in geometry*. Retrieved June 19, 2021 from the World Wide Web <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL23/S088/paper.pdf>.
- Čizmešija, A. Soucie, T. & Svedrec, R. (2012). Primjena geoploče u nastavi matematike. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 50, 25–39.

**Sanja M. Maričić**

University of Kragujevac, Faculty of Education, Užice

**Jelena R. Stojkanović**

High school „Jofif Pančić”, Bajina Bašta

## **DOTTED GRID AND SQUARE GRID IN TEACHING GEOMETRY IN LOWER GRADES OF ELEMENTARY SCHOOL**

### **Summary**

This work aims to underline the advantage of use of dotted grid and square grid as auxiliary tools for visualization in adoption of basic notions in geometry and problems solving in geometry in lower grades of elementary school. Visualization is an important part of cognitive process in mathematics while square grid and dotted grid help students visualize mathematic tasks therefore being significant. Although they are used in every grade of the initial four grades of primary school in the process of teaching geometry topics, neither students nor teachers use their advantages to a sufficient extent. The advantages of their use have been confirmed in the research conducted with the students of second and fourth grade in two primary schools. By analyzing of the obtained test results, we concluded that the use of the square grid increases the success in problem solving. Considering that notebooks with a square grid are used in mathematics teaching, the square grid should be used especially in the field of geometry.

**Keywords:** *visualization, square grid, dotted grid, geoboard, geometry.*