

Визуелне репрезентације као подршка развоју мултипликативног мишљења

Ивана З. Веселиновић

ОШ „Бранко Радичевић”, Београд *

Маријана Ж. Зељић*

Универзитет у Београду, Факултет за образовање учитеља и васпитача

Милана М. Дабих Борић

Универзитет у Београду, Факултет за образовање учитеља и васпитача

А П С Т Р А К Т

Развој мултипликативног мишљења представља један од кључних корака у математичком образовању ученика млађег школског узраста. Циљ овог истраживања био је да се испита утицај различитих наставних приступа на успешност ученика и избор стратегија при решавању визуелно представљених задатака множења. Истраживање је спроведено на узорку од 89 ученика другог разреда основне школе, који су били подељени у две експерименталне и једну контролну групу. У првој експерименталној групи настава је организована кроз комбинацију визуелних репрезентација и аритметичких правила, док је другој групи употреба репрезентација повезана са задацима различитих семантичких структура. Контролна група учила је множење применом приступа заснованог на моделу једнаких група и поновљеном сабирању. Резултати показују статистички значајно већи напредак ученика у експерименталним групама у односу на контролну групу, као и већу заступљеност ефикаснијих мултипликативних стратегија. Посебно се издвајају правоугаоне схеме и декадне репрезентације, чије коришћење подржава развијање флексибилних стратегија множења.

Кључне речи: мултипликативно резоновање, визуелне репрезентације, стратегије множења, почетна настава математике.

* ivanaveselinovic94@gmail.com

* marijana.zeljic@uf.bg.ac.rs, <https://orcid.org/0000-0002-0735-9847>

* milana.dabic@uf.bg.ac.rs, <https://orcid.org/0000-0003-3168-4161>

Увод

Мултипликативно резонување представља кључну компоненту математичког мишљења ученика основне школе, како у раним тако и у каснијим годинама школовања (Norton et al., 2015). Истраживања у области математичког образовања доследно показују да се развој мултипликативног мишљења не заснива само на усвајању рачунске процедуре и на овладавање таблицом множења, већ и на разумевању вишеструких значења множења у различитим мултипликативним ситуацијама (Greer, 1992; Siemon et al., 2005; Vergnaud, 1983). Иако поновљено сабирање често остаје „имплицитан, несвесни и примитивни модел” за множење (Fischbein et al., 1985), научници наглашавају да је модел поновљеног сабирања непотпун и да је потребна значајана квалитативна промена како би се добила основа за мултипликативно мишљење (Greer, 1992).

Ограничено излагање ученика само једном типу ситуација (нпр. једнаке групе) може довести до редукованог разумевања множења и ослањања на адитивне стратегије (Barmby et al., 2009; Kosko, 2020; Zeljic et al., 2025). У том контексту, визуелне репрезентације имају кључну улогу јер чине видљивом структуру односа између количина и подржавају прелазак са адитивног на мултипликативно резонување (Battista, 2003; Steffe, 1994).

Истраживања показују да употреба разноврсних, структурно смислених визуелних репрезентација у различитим мултипликативним контекстима подржава флексибилност у размишљању и дубље разумевање множења као операције, а не само као поновљеног сабирања (Barmby et al., 2009; Fuson, 2003; Van de Walle, 2006; Zeljic et al., 2025).

Теоријски оквир

Мултипликативно мишљење: од стратегија до релационог разумевања

Примена флексибилних стратегија множења представља важну карактеристику мултипликативног мишљења. Већи број аутора истиче значај коришћења задатака различите семантичке структуре, као и став да је развој интуитивних стратегија множења условљен семантичком структуром проблема који се решавају (Anghileri, 1989; Downton & Sullivan, 2017; Greer, 1992; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997). У прилог томе иду и резултати бројних истраживања који показују да деца поседују интуитивна знања и да могу да решавају задатке са множењем пре формалног увођења ове операције (Downton & Sullivan, 2017; Greer, 1992; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Даунтон и Саливан (Downton & Sullivan, 2017) истичу да подстицање ученика да се баве сложенијим задацима покреће употребу софистицираних стратегија. У литератури се може наћи неколико различитих класификација стратегија (Табела 1).

Табела 1

Класификација стратегија множења

Аутори	Стратегије
Mulligan & Mitchelmore (1997)	• Директно бројање (бројање без разматрања мултипликативне структуре) • Ритмичко бројање (бројање које прати структуру проблема, нпр. 1, 2; 3, 4; 5, 6) • Бројање прескакањем (бројање у групама нпр. 2, 4, 6...) • Адитивно рачунање (нпр. $2 + 2 = 4$, $4 + 2 = 6$) • Мултипликативно рачунање (коришћење научених или изведених чињеница о множењу: $6 \cdot 6 = 36$ или ако је $5 \cdot 6 = 30$, онда се на $5 \cdot 6$ додаје још 6)
Sherin & Fuson (2005)	• Стратегије „број све“ и „број по“ (различите врсте бројања) • Адитивно рачунање (поновљено сабирање: $2 + 2 = 4$, $4 + 2 = 6$; као и обједињавање група и сабирање: $4 \cdot 8 = 16 + 16$) • Стратегије засноване на обрасцима (нпр. „правило десетица“ или „правило девет прстију“) • Научени производи (механичко памћење, без видљивог рачунања) • Хибридне стратегије (комбинације наведених стратегија)
Downton & Sullivan (2017)	• Прелазно бројање (визуализација група помоћу репрезентација, нпр. прстију или цртежа) • Постепено грађење: двоструко бројање и бројање по виšekратницима (ослања се на бројање прескакањем или комбинацију бројања прескакањем и удвостручавања) • Удвостручавање и преполовљавање ($7 \cdot 8 = 56$ јер је $7 \cdot 2 = 14$, $14 + 14 = 28$, $28 + 28 = 56$) • Мултипликативно рачунање (према дефиницији Mulligan i Mitchelmore, 1997) • Холистичко размишљање (растављање бројева коришћењем дистрибутивног својства, груписање и/или процена помоћу познатих производа)

Стил и Фанел (Steel & Funnell, 2001) наглашавају да се прогресирање мање ефикасних стратегија у ефикасне стратегије не мора нужно догодити ако се њиховом развоју не посвети посебна пажња. Ученици најчешће примењују ону стратегију коју виде као добро познати алгоритам и сигурнији су да ће успети (Baranes et al., 1989) или зато што верују да се од њих очекује да ураде баш то.

Мултипликативно резонување може се разматрати и кроз теорију шема. Према овој теорији, основу мултипликативног мишљења чини координација јединица, која описује способност ученика да изграђује сложене јединице (јединице састављене од јединица) и оперише њиховим различитим нивоима и да примењује ове структуре у решавању проблема (Hackenberg, 2010; Kosko, 2020; Steffe, 1994; Tzur et al., 2021). Дефинисана су три мултипликативна концепта (Hackenberg, 2010; Kosko, 2020), од којих најнижи подразумева антиципацију једног нива јединица

(нпр. у ситуацији $4 \cdot 6$ ученик може да сагледа четири шестице), а највиши подразумева да ученици могу да антиципирају три нивоа јединица (нпр. у претходном примеру ученик може да сагледа $12 \cdot 6$ као $4 \cdot 6 + 8 \cdot 6$, али и као $10 \cdot 6 + 2 \cdot 6$). Према наведеној теорији, адитивно и мултипликативно резонување не разликују се по операцијама које се изводе, већ по шемама које ученик конструише. Адитивно резонување подразумева оперисање са јединицама (бројање по један), док мултипликативно резонување укључује координацију више нивоа јединица – способност да се групе схвате као нове јединице и да се оне унапред сагледавају и користе у оперисању (Kosko, 2020).

Улога репрезентација у развијању мултипликативног мишљења

Разумевање множења не подразумева само усвајање нове аритметичке операције, већ квалитативну промену у начину на који ученици размишљају о бројевима, количинама и јединицама (Hiebert & Carpenter, 1992). У том контексту, визуелне репрезентације имају значајну улогу, али само уколико су структурно повезане са математичким значењем операције. У литератури се издваја више врста иконичких репрезентација множења: једнакобројни скупови, правоугаоне схеме и модели површи, линеарне репрезентације/бројевна права (Anghileri, 2000; Barmby et al., 2009; Battista et al., 1998; Carpenter et al., 2015; Fuson, 2003; Greer, 1992; Kosko, 2020). Једнакобројне групе представљају једну од основних визуелних репрезентација множења у почетној настави, у којој се појединачне јединице организују у више група са истим бројем елемената. Ове репрезентације имају значајну улогу у почетном разумевању основног значења операције множења (Anghileri, 2000; Battista et al., 1998; Greer, 1992). Употреба правоугаоних схема је веома корисна репрезентација за развој стратегија множења, јер истиче многобројна значења операције множења (Anghileri, 2000; Barmby et al., 2009), а не само као поновљено сабирање (Harries & Barmby, 2007). Ученици који су их користили успешније су препознавали својства комутативности и дистрибутивности, што истиче значај структурисаних визуелних модела у експлицитном представљању мултипликативних односа (Jacob & Mulligan, 2014; Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005). Даље, употреба правоугаоне схеме оспособљава ученике да самостално цртају правоугаоне схеме и користе их као олакшице у рачунању, али и као подршку за развој личних стратегије рачунања (Young-Loveridge, 2005). У контексту развоја концептуалног разумевања множења, декадне (енгл. *base-10*) визуелне репрезентације, имају значајну улогу у развоју мултипликативног резонувања (Fuson, 2003; Van de Walle, 2006). Декадне репрезентације омогућавају ученицима да уоче декадну структуру броја (у контексту множења двоцифреног броја) и да множење третирају као операцију над тим структурисаним јединицама уместо као понављено сабирање (Fuson, 2003; Hiebert & Wearne, 1992). На пример, разлагање производа типа $7 \cdot 34$ на $7 \cdot (30 + 4)$ постаје разумљиво кроз просторну организацију јединица и десетица, а дистрибутивни закон се појављује као последица структуре репрезентације, а не као формално правило.

Ефикасност репрезентација зависи, пре свега, од тога да ли ученици успевају да уоче и координишу структуру јединица које су њима представљене (Barmby et al., 2009; Kosko, 2020). Другим речима, репрезентације могу подржати разумевање множења само ако ученици препознају односе између елемената, група и сложенијих јединица. Истраживања показују да коришћење различитих визуелних репрезентација може подстаћи дубље разумевање множења и примену флексибилнијих стратегија рачунања (Downton & Sullivan, 2017), а утиче и на начин на који ученици концептуализују мултипликативне односе (Kosko, 2020). Међутим, ученици могу користити различите стратегије чак и када раде са истом визуелном репрезентацијом (Kosko, 2020). Ово указује на то да избор стратегије не зависи искључиво од облика репрезентације, већ и од начина на који је структура јединица у њој истакнута и интерпретирана. Иако мултипликативна структура може деловати очигледно одраслима, бројна истраживања показују да деца ту структуру не уочавају спонтано (Anghileri, 1995; Barmby et al., 2009; Barmby et al., 2011). Уколико се током наставе пажња ученика не усмерава на односе између јединица, визуелне репрезентације могу остати на нивоу подршке адитивним стратегијама, уместо да подстакну развој мултипликативног резоновања (Kosko, 2020; Lamont, 2007). У том смислу, избор стратегија у већој мери зависи од начина на који су јединице представљене и квантификоване него од саме форме репрезентације (Kosko, 2020). У складу са тим, Гравемајер (Gravemeijer, 1999) визуелне репрезентације описује као средства која се постепено трансформишу из контекстуалних алата за решавање проблема у носиоце формалног математичког знања.

Циљ и истраживачка питања

Претходна теоријска разматрања указују на два различита приступа развоју мултипликативног мишљења и стратегија множења, што је представљало полазиште за формулисање проблема овог истраживања. Једна група аутора сматра да ученици треба да буду упознати са аритметичким правилима чија експлицитна примена омогућава разумевање стратегија множења једноцифрених бројева (Fuson, 2003; Götte & Baiker, 2021; Van de Walle, 2006). Овакав приступ, у којем се дистрибутивност експлицитно разматра, подстиче флексибилно оперисање различитим сложеним јединицама и тиме подржава развој највишег нивоа мултипликативног мишљења (Kosko, 2020; Norton et al., 2015). Друга група аутора сматра да разумевање својстава операција произлази из смислених активности и проблема, а не само из формалног подучавања (Carpenter et al., 2015; Nunes & Bryant, 1996; Siegler, 1988). Према овој перспективи, увођење аритметичких правила није предуслов за развој стратегија множења, већ оне могу бити подстакнуте употребом различитих семантичких структура текстуалних задатака (Ambrose et al., 2003; Anghileri, 1989; Bakker et al., 2014; Downton & Sullivan, 2017; Koubas, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Sherin & Fuson, 2005).

У овом истраживању испитује се који од ова два приступа представља бољи оквир за коришћење визуелних репрезентација у циљу развоја стратегија множења. Стога испитујемо успешност ученика и употребу стратегија множења при

решавању задатака са различитим визуелним репрезентацијама. Посебно испитујемо како облик и врста репрезентације утичу на разумевање мултипликативне ситуације и избор стратегије множења.

У складу са тим, формулисана су следећа истраживачка питања:

1) Да ли постоје разлике у успешности ученика у решавању визуелно представљених задатака у зависности од наставног приступа којем су били изложени?

2) Да ли се групе ученика разликују у употреби стратегија решавања задатака након примене различитих инструкционих приступа?

3) На који начин облик и врста репрезентације утичу на успешност ученика у препознавању и разумевању мултипликативних ситуација, као и на избор стратегија множења?

Метод

У истраживању је коришћен квази-експериментални дизајн, који је укључивао две експерименталне групе и једну контролну групу. Резултати које приказујемо у овом раду само су део резултата ширег истраживања. Укупан узорак чинило је 89 ученика из три одељења једне основне школе у Београду, Србија. Сви ученици били су узраста 8 или 9 година, а одељења су била уједначена приликом уписа у школу од стране педагошко-психолошке службе. Једно одељење чинило је контролну групу (30 ученика), док су преостала два одељења чинила експерименталне групе – Групу аритметичких правила (31 ученик) и Групу семантичких структура (28 ученика). Узорак је био погодан, будући да школа у којој је истраживање спроведено сарађује са институцијом истраживача.

Поступак и инструменти

Истраживање је спроведено у неколико етапа: Иницијални тест (након једног часа обраде наставне јединице *Множење. Знак пута*); Реализација наставних часова; Завршни тест. Интервенција за сваку групу реализована је током 16 часова у периоду од четири недеље, при чему је све часове реализовао исти наставник, који је уједно био и један од истраживача. Време за рад на тестовима није било ограничено.

У сврху испитивања успешности и стратегија множења, на задацима са визуелним репрезентацијама конструисан је иницијални и завршни тест знања. Сваки од њих се састоји из 4 задатка. Овим задацима проверава се способност ученика да: 1) састављају бројевне изразе који одговарају задатој репрезентацији и израчунавају њихову вредност; 2) примене различите стратегије за одређивање вредности производа; 3) креирају репрезентацију која одговара датом изразу. Будући да су поједини задаци имали више ставки, укупан број ставки које су на тесту бодоване је седам. Завршни тест је исти као и иницијални, са измењеним бројевима. Задаци су приказани у прилогу (Прилог 1).

Интервенција

У програму за други разред математике у Републици Србији (Правилници, 2018–2023), као исход везан за множење једноцифрених бројева наводи се да ученик треба да „усмено множи и дели у оквиру прве стотине”. У начину остваривања програма пише да се множење упознаје као поновљено сабирање (сабирање једнаких сабирака), да се посматрају разни примери који представљају мултипликативну схему (када на n места имамо по m елемената), а као један од важних циљева поставља се памћење таблице множења и дељења до 100.

Иако Наставни програм у Србији имплицитно омогућава употребу флексибилних стратегија рачунања увођењем одговарајућих аритметичких правила, наглашавање приступа множењу као збиру једнаких сабирака одражава се на методичке приступе у уџбеницима, у смислу да уџбеници не подржавају развијање флексибилних стратегија множења и разумавање различитих мултипликативних ситуација (Zeljić i Dabić Boričić, 2020).

Стога, наша студија упоређује успех у множењу и употребу стратегија код три групе ученика.

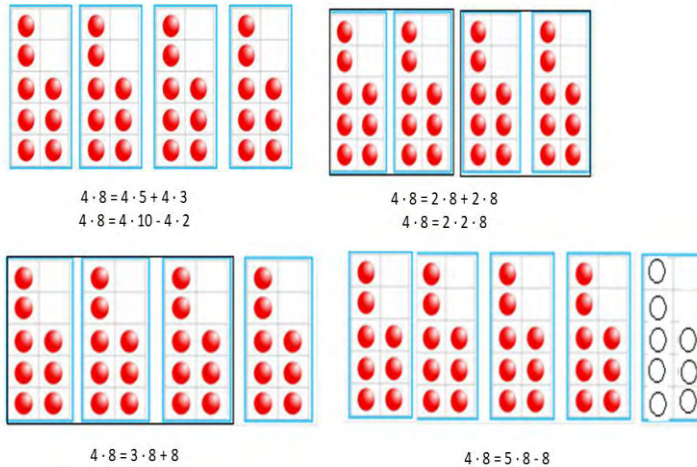
Прва група (Група аритметичких правила) обучавана је стратегијама множења заснованим на аритметичким правилима уз систематску употребу различитих визуелних репрезентација.

Друга група (Група семантичких структура задатака) учила је множење кроз употребу различитих визуелних репрезентација у комбинацији са текстуалним задацима различитих семантичких структура. Трећа група, која је служила као контролна група, добила је инструкције засноване на моделу једнаких група и поновљеном сабирању.

Група аритметичких правила

У овој групи настава множења једноцифрених бројева била је заснована на доследној примени аритметичких правила, при чему су репрезентације коришћене првенствено као основа за изражавање значења и примену правила. Најпре су ученици учили множење бројевима 2, 5 и 10, а затим су им уведена аритметичка правила (комутативност, асоцијативност и дистрибутивност) користећи дидактички прилагођене називе и различите облике репрезентација.

Аритметичка правила која су ученици усвојили послужила су као основа за увођење множења преосталим једноцифреним бројевима. Сваки пут ученици су подсећани да примене правило аритметике које су претходно научили. Ученици су затим подстицани да користе различите стратегије множења на основу репрезентације (Слика 1), те су објашњавали своје поступке као примену одређених аритметичких правила.

Слика 1*Пример коришћења декадних репрезентација*

Примери су даље варирани тако што су коришћене репрезентација правоугаоне схеме (попут горе наведених) и доминске репрезентације. На почетку наставе ученици су користили визуелне репрезентације као подршку разумевању правила и њихове примене, док су касније изводили прорачуне без употребе репрезентација.

Група семантичких структура

Основна разлика у односу на наставни приступ примењен у Групи аритметичких правила јесте у томе што ученици у Групи семантичких структура нису били експлицитно поучавани аритметичким правилима. Уместо тога, ова правила су примењивали имплицитно, ослањајући се на структуре визуелних репрезентација и семантичке структуре текстуалних задатака које су решавали. Коришћене су репрезентације правоугаоних низова, декадне репрезентације и једнаке групе (домино-репрезентације), а стратегије рачунања су подстицане кроз њихове различите структуре и разноврсно груписање сложених јединица (Слика 1). Поред тога, ученици су решавали текстуалне задатке са различитим семантичким структурама (једнаке групе, мултипликативно поређење, Декартов производ, правоугаоне схеме, мерни односи). Аритметичка правила су формално уведена тек у завршној фази наставе множења једноцифрених бројева и нису коришћена као основа за учење множења, за разлику од Групе аритметичких правила. Правила су објашњавана кроз генерализације засноване на реалистичним ситуацијама, слично као у Групи аритметичких правила.

Контролна група

У Контролној групи множење једноцифрених бројева учено је кроз адитивни приступ. Овај наставни модел заснива се на националном наставном плану и програму и подржан је уџбеником који су ученици користили. Множење је првенствено представљано кроз модел једнаких група, док су друга значења множења била минимално заступљена. Овај приступ интегрише адитивно и мултипликативно мишљење и наглашава концептуалну разлику између ситуација типа „ m група од n елемената”. Одређивање производа два броја заснивало се на поновљеном сабирању; на пример, $3 \cdot 6 = 6 + 6 + 6$. Иако су правила комутативности и асоцијативног груписања била поучавана, ученици у овој групи нису учили множење збира или разлике бројем (дистрибутивно својство) током наставе множења једноцифрених бројева. Комутативност је уведена помоћу правоугаоне схеме, али је њена примена била ограничена на подршку множењу путем сабирања једнаких сабирака (нпр. лакше је израчунати $2 \cdot 6$ као $6 + 6$ него $6 \cdot 2$ као збир шест двојки). Слично томе, асоцијативност је уведена кроз контекстуални пример, али искључиво са циљем да се покаже да се три фактора могу множити различитим редоследом (нпр. $2 \cdot (5 \cdot 3) = (2 \cdot 5) \cdot 3$). Иако су ученици разумели ова правила и могли да их примене на бројеве, она у даљој настави нису коришћена као основа за стратегије рачунања, што значи да је њихова оперативна употреба изостала. Правило множења збира бројем (следећи уџбеник као основе за конципирање оперативног плана) није уведено у оквиру теме множење једноцифрених бројева.

План анализе података

Сваки захтев (ставку) на тесту знања (Прилог 1) бодовали смо са 2 поена уколико је ученик писао израз са множењем, са једним поеном уколико је написао израз са сабирањем или са 0 поена уколико није написао израз или уколико је дошао до одговора пребројавањем.

Приказаћемо метријске карактеристике теста, а затим упоредити постигнућа група користећи једнофакторску ANOVA анализу за иницијални, односно ANCOVA анализу за завршни тест. Да би се анализирао употреба стратегија (друго истраживачко питање), три истраживача су независно прегледала сваки тест, разменила своје извештаје о категоријама и постигла консензус о коначној листи категорија:

- Пребројавање (као што је описано у Mulligan & Mitchelmore, 1997 и Sherin & Fuson, 2005);

- Поновљено сабирање, нпр. $2 + 2 + 2 = 6$ (Sherin a & Fuson, 2005);

- Дуплирање нпр. $7 \cdot 8 = 56$, на основу удвостручавања: дупло 7 је 14, затим $14 + 14 = 28$, и $28 + 28 = 56$ (Downton & Sullivan, 2017);

- Научени производи, тј. директно подсећање на чињенице множења без видљивог израчунавања (Sherin a & Fuson, 2005);

– Мултипликативне стратегије, тј. разлагање бројева коришћењем дистрибутивног својства, асоцијативности и/или процене, тј. коришћење познатих („лаких“) производа да би се израчунала вредност непознатог производа (Downton & Sullivan, 2017).

Како бисмо одговорили на питање утицаја облика и врсте репрезентације на успешност ученика и стратегије множења, анализираћемо индексе лакоће задатака и расподелу стратегија на целом узорку.

За анализу разлика у расподелама коришћења стратегија користили смо Хи-квадрат тест. Подаци су анализирани у SPSS-у.

Резултати

Дескриптивни показатељи постигнућа (M – аритметичка средина, Md – медијана, SD – стандардна девијација, Min , Max , $Max\%$ – проценат ученика са максималним број поена) за укупан скор на иницијалном и завршном тесту приказани су у Табели 2.

Табела 2

Дескриптивни показатељи постигнућа по групама на иницијалном и завршном тесту

Тест	Контролна група		Група аритметичких правила		Група семантичких структура	
	Иницијални	Завршни	Иницијални	Завршни	Иницијални	Завршни
M	6,60	5,90	8,97	11,29	8,96	12,07
Md	6,00	6,00	9,00	14,00	10,00	14,00
SD	3,95	4,72	3,81	4,20	3,95	3,34
Min	0	0	1	0	0	2
Max	14	14	14	14	14	14
$Max\%$	6,7%	6,7%	19,4%	54,8%	14,3%	64,3%

Скорови на иницијалном тесту показали су умерену поузданост мерену Кронбах алфа коефицијентом ($\alpha = 0,76$) уз стандардну грешку мерења $SEM \approx 1,95$, док је на посттесту забележена висока поузданост ($\alpha = 0,90$) уз нижу грешку мерења ($SEM \approx 1,54$). На завршном тесту је уочен изражен сининг ефекат, будући да је значајан проценат ученика у експерименталним групама остварило максималан скор (14/14), што указује на ограничену дискриминативност теста у горњем делу скале након интервенције и захтева опрез у интерпретацији разлика у постигнућу на завршном тесту. Анализа ставки (r – коригована корелација ставки са укупним скором, α_{del} – α коефицијент ако се ставка изостави, p - индекс лакоће, рачунат као половина аритметичке средине) на иницијалном и завршном тесту приказана је у Табели 3.

Табела 3

Анализа ставки на иницијалном (пре) и завршном тесту (пост)

Ставка	Тест	1)	2а)	2б)	2в)	3)	4а)	4б)
<i>M</i>	пре	1,12	1,03	0,89	0,99	1,33	1,37	1,44
	пост	1,10	1,45	1,19	1,16	1,65	1,63	1,54
<i>SD</i>	пре	1,00	0,88	0,91	0,90	0,88	0,84	0,82
	пост	1,00	0,89	0,96	0,96	0,74	0,77	0,84
<i>r</i>	пре	0,39	0,52	0,51	0,59	0,28	0,56	0,57
	пост	0,53	0,76	0,82	0,82	0,68	0,66	0,77
α_{del}	пре	0,76	0,73	0,73	0,71	0,78	0,72	0,72
	пост	0,91	0,88	0,88	0,88	0,89	0,90	0,88
<i>p</i>	пре	0,560	0,515	0,445	0,495	0,665	0,685	0,720
	пост	0,550	0,725	0,595	0,580	0,825	0,815	0,770

На иницијалном тесту индекси лакоће кретали су се од $p = 0,445$ до $p = 0,720$, уз умерене дискриминативности (коригована корелација ставке од $r = 0,28$ до $r = 0,59$). Најнижу дискриминативност имала је ставка 3, при чему би изостављање ове ставке благо повећало поузданост скале. На завршном тесту уочава се пораст лакоће већине ставки (од $p = 0,550$ до $p = 0,825$) и изражено боље дискриминативне карактеристике ($r = 0,53$ до $r = 0,82$), што је у складу са већом унутрашњом конзистентношћу на завршном тесту. Истовремено, највише вредности индекса лакоће на ставкама 3 и 4а указују на то да су те ставке на завршном тесту биле врло лаке и вероватно допринеле уоченом силинг ефекту на нивоу укупног скорa.

За испитивање разлика међу групама на иницијалном тесту коришћена је једнофакторска ANOVA. Претпоставка хомогености варијанси била је испуњена (Levene $p = 0,937$). Тест је показао статистички значајне разлике у постигнућу на иницијалном тесту између три групе, $F(2, 86) = 3,66$, $p = 0,030$ ($\eta^2 \approx 0,08$), при чему су пост хок поређења (Tukey) показала да је контролна група имала ниже постигнуће у односу на обе експерименталне групе (гранично значајно: $p = 0,052$ и $p = 0,060$), док се експерименталне групе нису разликовале ($p > 0,05$).

С обзиром на почетне разлике у постигнућу, за поређење група на завршном тесту примењена је ANCOVA са скором завршног теста као зависном варијаблом, а скором иницијалног теста као коваријатом. Претпоставка хомогености регресионих нагиба била је испуњена, јер интеракција између групе и иницијалног скорa није била статистички значајна, $F(2, 85) = 0,38$, $p = 0,682$, ($\eta^2 = 0,01$). Стога је спроведена стандардна ANCOVA са скором иницијалног теста као коваријатом. Резултати су показали значајан ефекат коваријате ($F(2, 85) = 13,76$, $p < 0,001$, $\eta^2 = 0,14$), што указује на то да је почетно постигнуће значајно повезано са успехом на завршном тесту. Након контроле иницијалног теста, утврђен је и статистички значајан ефекат групе ($F(2, 85) = 14,56$, $p < 0,001$, $\eta^2 = 0,26$), што значи да се контролна и две експерименталне групе разликују у постигнућу на завршном тесту независно од почетног нивоa знања. Контролна група је имала значајно нижу подешену средину у односу на обе експерименталне групе (Табела 4). Пост хок поређења подешених средина показала су да је контролна група остварила стати-

стички значајно ниже постигнуће на завршном тесту у односу на Групу аритметичких правила ($p < 0,001$) и Групу семантичких структура ($p < 0,001$). Насупрот томе, разлика између две експерименталне групе није била статистички значајна ($p > 0,05$), што указује на то да, након контроле иницијалног постигнућа, две примењене интервенције доводе до упоредивог учинка на завршном тесту.

Табела 4

Подешене средине (M_{adj}), Стандардна грешка (SE) и 95% интервал поузданости (95% CI) за успешност на завршном тесту

	M_{adj}	SE	95% CI
Контролна група	6,52	0,73	[5,08, 7,96]
Група аритметичка правила	10,97	0,70	[9,58, 12,36]
Група семантичка структура	11,76	0,74	[10,29, 13,22]

Напомена. Рачунато за вредност коваријате на средњем нивоу узорка 8,17.

Фреквенције и проценти коришћења различитих стратегија на тестовима приказани су у Табели 5. Резултати хи-квадрат теста показују да се групе разликују по расподели употребе стратегија на иницијалном тесту $\chi^2(410,8) = 55,06$, $p < 0,01$, CramerV = 0,26 и на завршном тесту $\chi^2(407,8) = 109,91$, $p < 0,01$, CramerV = 0,37.

Табела 5

Фреквенције и проценти стратегија на иницијалном (пре) и завршном (пост) тесту

Стратегија	Контролна група		Група аритметичких правила		Група семантичких структура	
	пре	пост	пре	пост	пре	пост
Пребројавање	60	11	21	3	32	3
	48,0%	11,3%	13,6%	1,9%	24,4%	2,0%
Поновљено сабирање	64	11	109	17	81	11
	51,2%	11,3%	70,8%	10,8%	61,8%	7,2%
Дуплирање	1	9	22	54	14	56
	0,8%	9,3%	14,3%	34,2%	10,7%	36,8%
Таблица множења	0	52	0	22	2	15
	0,0%	53,6%	0,0%	13,9%	1,5%	9,9%
Мултипликативне стратегије	0	14	2	62	2	67
	0,0%	14,4%	1,3%	39,2%	1,5%	44,1%

Ради откривања утицаја облика и врсте репрезентације на избор стратегија код ученика приказујемо употребу стратегија на укупном узорку (Табела 6). Захтев у првом задатку је да се допуни слика (Прилог 1), па овај задатак није коришћен при испитивању употребе стратегија.

Табела 6

Фреквенција и проценти употребе стратегија на сваком од задатака

Стратегија	Тест	2а)	2б)	2в)	3)	4а)	4б)	Укупно
Пребројавање	пре	12	13	25	17	24	22	113
		10,6%	11,5%	22,1%	15,0%	21,2%	19,5%	100%
	пост	5	1	2	3	3	3	17
		29,4%	5,9%	11,8%	17,6%	17,6%	17,6%	100%
Поновљено саби- рање	пре	47	24	37	53	45	48	254
		18,5%	9,4%	14,6%	20,9%	17,7%	18,9%	100%
	пост	1	15	8	6	5	4	39
		2,6%	38,5%	20,5%	15,4%	12,8%	10,3%	100%
Дуплирање	пре	4	19	2	0	7	5	37
		10,8%	51,4%	5,4%	0,0%	18,9%	13,5%	100%
	пост	27	17	34	31	6	4	119
		22,7%	14,3%	28,6%	26,1%	5,0%	3,4%	100%
Таблица множења	пре	0	0	0	0	1	1	2
		0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	50,0%	50,0%	100%
	пост	33	11	4	13	16	12	89
		37,1%	12,4%	4,5%	14,6%	18,0%	13,5%	100%
Мултипликативне стратегије	пре	0	0	0	1	1	2	4
		0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	25,0%	50,0%	100%
	пост	4	12	7	26	45	49	143
		2,8%	8,4%	4,9%	18,2%	31,5%	34,3%	100%

Дискусија

Резултати истраживања показују да различити наставни приступи множењу утичу на успешност ученика у решавању визуелно представљених мултипликативних задатака, тј. на разумевање различитих мултипликативних репрезентација. Након контроле иницијалног постигнућа, анализа коваријансе показала је да су ученици обе експерименталне групе постигли статистички значајно боље резултате на завршном тесту у односу на контролну групу, док разлика између две експерименталне групе није била статистички значајна. Стога, независно од тога да ли су ученици подучавани уз помоћ аритметичких правила или уз помоћ семантичких структура, систематски рад са различитим репрезентацијама множења допринео је већој успешности ученика у решавању визуелно представљених мултипликативних задатака. Ови резултати потврђују став да настава која је усмерена искључиво на модел једнаких група не омогућава ученицима да развију ширину значења множења (Anghileri, 2000; Barmby et al., 2009; Gravemeijer, 1999; Hackenberg, 2010; Kosko, 2020; Steffe, 1994; Tzur et al., 2021), већ подстиче ограничено схватање множења као поновљеног сабирања. У таквом концептуалном оквиру ученици често не успевају да препознају мултипликативну структуру у новим контекстима или визуелним репрезентацијама, што може довести до слабијих постигнућа на задацима који захтевају флексибилније разумевање (Kosko, 2020; Lamon, 2007).

Посебно значајан налаз односи се на динамику постигнућа унутар контролне групе. Дескриптивни показатељи показују да ученици контролне групе нису остварили напредак током периода интервенције, већ напротив, њихов просечан резултат на завршном тесту био је нешто нижи него на иницијалном тесту (Табела 2). Овај резултат указује не само на изостанак позитивног ефекта примењеног приступа већ и на могућу стагнацију или регрес у разумевању мултипликативних односа. Резултати контролне групе показују недовољено развијено разумевање мултипликативних ситуација, што може бити и последица пренаглашености адитивног мишљења у настави (Clark & Kamii, 1996; Greer, 1992) од кога се ученици тешко удаљавају ако је оно доминантно заступљено. Ови резултати такође потврђују да ученици не уочавају спонтано мултипликативну структуру (Anghileri, 1995; Barmby et al., 2009; Barmby et al., 2011). Са друге стране, излагање ученика различитим контекстима омогућава им да формирају мрежу повезаних значења и да препознају заједничку структуру у различитим представама исте ситуације (Downton & Sullivan, 2017; Fuson, 2003; Siemon et al., 2005; Van de Walle, 2006). Овај налаз подржава становиште да визуелни модели функционишу као носиоци значења операције множења, јер омогућавају координацију више нивоа јединица и повезивање симболичког записа са значењем репрезентације мултипликативне ситуације (Anghileri, 2000; Carpenter, 1992; Hiebert & Kosko, 2020; Mulligan & Mitchelmore, 1997).

Други истраживачки задатак односио се на испитивање утицаја начина обраде множења једноцифрених бројева на развој флексибилних стратегија множења. Резултати истраживања указују на значајне промене у стратегијама множења ученика између иницијалног и завршног тестирања. На иницијалном тесту у свим групама доминирале су стратегије пребројавања и поновљено сабирање, што указује на ограничено мултипликативно разумевање и ослањање на схватање множења као „скраћеног” сабирања. Овај налаз је у складу са ставом да развој мултипликативног мишљења представља постепен прелаз од адитивног ка релационом разумевању односа између количина (Greer, 1992; Siemon et al., 2005). На завршном тесту уочава се значајан пад употребе ових стратегија и пораст употребе табличног знања множења и флексибилнијих стратегија множења. Дакле, без обзира на модел подучавања, ученици ће успети да подједнако овладају множењем једноцифрених бројева. Међутим, Килпатрик (Kilpatrick et al., 2001) је истакао значај обраде процедура и стратегија рачунања са разумевањем, јер усвајање истих без разумевања води потешкоћама у рачунању са вишеструцим бројевима (Zeljic et al., 2025). Ученици контролне групе нису показали снажан пораст флексибилних мултипликативних стратегија. Контролна група се најчешће ослањала на научене производе да би одредила производ два броја (53,6% коришћених стратегија), значајно више од групе аритметичких правила (13,9%) и групе семантичке структуре (9,9%). Ученици контролне групе су такође често користили поновљено сабирање и пребројавање (по 11,3%). Доминантна употреба чињеничног знања и одсуство ефикасних стратегија указују на то да су ученици чињенице множења научили напамет и да је њихово размишљање остало адитивне природе (Baroody, 2006; Steel & Funnell, 2001; Zeljc et al., 2019; Zeljc et al., 2025). Другим

речима, настава заснована на једнаким групама и поновљеном сабирању омогућава коришћење пребројавања, поновљеног сабирања и памћење производа, али не подстиче прелазак на више нивое координације јединица и, последично, на више нивое мултипликативног резонавања (Hackenberg, 2010; Steffe, 1994). Ученици су, без обзира на ефикасност стратегије, прибегавали стратегијама у којима су били најсигурнији (Baranes et al., 1989). Иако овакво знање омогућава ефикасно решавање задатака, оно не мора нужно подразумевати разумевање различитих мултипликативних ситуација нити способност избора стратегије у зависности од контекста (Greer, 1992; Siemon et al., 2005). Наши резултати потврђују став да без систематичне подршке кроз различите репрезентације и активности ученици ређе спонтано развијају софистицираније облике мултипликативног резонавања (Steel & Funnell, 2001). Супротно томе, у експерименталним групама уочен је изражен пораст стратегија дуплирања и мултипликативних стратегија, уз мање ослањање на чисто меморисано таблично знање. Резултати показују да употреба различитих репрезентација подстиче и примену холистичких стратегија (Battista, 2003; Downton & Sullivan, 2017; Hackenberg, 2010; Jacob & Mulligan, 2014; Kosko, 2020; Siemon et al., 2011; Steffe, 1994; Tzur et al., 2021), као и обликовање начина на који ученици концептуализују мултипликативне односе (Kosko, 2020). Рад са разноврсним репрезентацијама може подстаћи осмишљавање стратегија множења без непосредног ослањања на формална аритметичка правила, што је у складу са истраживањима која показују да се стратегије могу развијати кроз смислене активности и решавање проблема (Downton & Sullivan, 2017; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Резултати такође показују да су деца млађег узраста способна да разумеју својства операција када се утемељују из смислених активности и проблема (Carpenter et al., 2015; Nunes & Bryant, 1996), као и да их примене као основу флексибилних стратегија (Fuson, 2003; Götz & Baiker, 2021; Van de Walle, 2006).

Наредно истраживачко питање односило се на утицај облика репрезентације на развој мултипликативног мишљења и стратегија множења. Резултати истраживања показују да облик и врста репрезентације имају значајан утицај и на успешност ученика и на избор стратегија множења, што је у супротности са резултатима које износи Коско (Kosko, 2020). Први задатак на тесту захтевао је да ученици доврше започету правоугаону схему на основу датог израза. Истраживања показују да способност самосталне конструкције правоугаоне репрезентације представља показатељ развијенијег мултипликативног мишљења (Gravemeijer, 1999; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Young-Loveridge, 2005), које омогућава примену различитих стратегија. Вредност индекса лакоће овог задатка указује на средњу успешност, како на иницијалном ($p = 0,560$), тако и на завршном тесту ($p = 0,550$). Овај резултат упућује на потребу даљег рада на развијању мултипликативног мишљења ученика. Релативно низак успех може се делимично објаснити ограниченим искуством ученика, посебно контролне групе, са правоугаоним схемама у настави.

Други задатак заснивао се на моделу једнаких група, али је иста ситуација представљена различитим структурисањем сложених јединица: као $6 \cdot 4$, али и као $2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4$ и $3 \cdot 4 + 3 \cdot 4$. Највеће тешкоће јављају се у задацима 2б и 2в

(индекси лакоће на иницијалном тесту $p = 0,515$ односно $p = 0,445$), где је структура представљена као збир парцијалних производа. Ученици морају да уоче да више композитних јединица може представљати исту количину као један производ, што захтева виши ниво концептуалног разумевања. Према теорији координације јединица, способност конструисања и координације сложених јединица представља основу мултипликативног мишљења (Hackenberg, 2010; Kosko, 2020; Steffe, 1994). Ови резултати указују на то да ученици често доживљавају мултипликативну ситуацију као фиксну структуру, а не као однос који се може реорганизовати (Kosko, 2020; Lamou, 2007). На трећем задатку са правоугаоном схемом, ученици показују боља постигнућа ($p = 0,825$), посебно на завршном тесту. То говори у прилог ставовима да коришћење правоугаоних схема подржава разумевање комутативности и дистрибутивности и подстиче употребу флексибилних стратегија множења (Anghileri, 2000; Harries & Barmby, 2007; Young-Loveridge, 2005). У терминима теорије шема, оне олакшавају прелазак ка вишим мултипликативним концептима. Највећа успешност на иницијалном тесту забележена је на задацима са декадним репрезентацијама (четврти задатак, $p = 0,685$ и $p = 0,720$), а висока успешност на овом задатку је и на завршном тесту ($p = 0,815$, односно $p = 0,770$). Просторна организација десетица и јединица омогућава ученицима да множење посматрају као операцију над структурисаним јединицама, а не као понављано сабирање (Fuson, 2003; Hiebert & Wearne, 1992; Kosko, 2020; Tzur et al., 2021).

Највећи број стратегија које су ученици интуитивно користили пре систематске обраде множења је пребројавање и поновљено сабирање (113, односно 254 стратегије, Табела 6). Зачајан пораст стратегије дуплирања у задатку 26 на иницијалном тесту (51,4% употребе стратегије дуплирања је на овом задатку) указује на развој способности рада са сложенијим јединицама (Hackenberg, 2010; Kosko, 2020). Са друге стране, на завршном тесту дошло је приметног повећања коришћења мултипликативних стратегија на задацима са правоугаоним и декадним репрезентацијама – од 143 мултипликативне стратегије које су употребљене, 84% је употребљено на трећем и четвртом задатку. Наведени резултати делимично потврђују став да избор стратегија у већој мери зависи од начина на који је јединица представљена и квантификована, него од саме форме репрезентације (Kosko, 2020).

Међу ограничењима студије може се издвојити чињеница да је истраживање спроведено на пригодном узорку ученика из једне школске установе, при чему се резултати тумаче у оквиру наставног контекста и важећег програма. Поред тога, број задатака по појединим типовима визуелних репрезентација био је ограничен, што је условљено обимом шире студије, при чему су у овом раду приказани одабрани делови укупног истраживачког материјала.

Закључак

Резултати истраживања показују да успешност ученика у решавању визуелно представљених задатака множења у значајној мери зависи од наставног модела који је примењен, а као важан фактор издвојио се и облик репрезентације. Кон-

тролна група, која је учила множење првенствено кроз модел једнаких група и поновљено сабирање, није показала напредак на завршном тесту, већ је остварила и нешто нижа постигнућа у односу на иницијално мерење. Формално увођење правила аритметике у наставу неће довести до њихове оперативне примене без коришћења репрезентација и проблема коју су носиоци значења правила и поступка рачунања. Наши резултати показују да адитивни приступ, иако важан у раној фази и доминантно истакнут у нашем програму и уџбеницима, није довољан за развој мултипликативног мишљења.

У целини, резултати овог истраживања имају значајне импликације за обликовање наставе множења у почетном математичком образовању. Они указују на то да развој мултипликативног мишљења захтева наставу која превазилази модел поновљеног сабирања и систематски укључује рад са различитим репрезентацијама, семантичким структурама задатака и аритметичким правилима као носиоцима математичког значења.

Резултати посебно указују на потребу за већом заступљеношћу декадних репрезентација у наставној пракси и уџбеничким материјалима, будући да оне подржавају разумевање множења као операције над структурисаним јединицама и подстичу развој флексибилнијих мултипликативних стратегија. Упркос томе, оне су у пракси често недовољно заступљене у раној настави множења, као и у студијама којима се испитује улога репрезентација у разумевању множења једноцифрених бројева.

Литература

- Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 305–336). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 367–385. <https://doi.org/10.1007/BF00315607>
- Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. A&C Black.
- Anghileri, J. (1995). *Children's mathematical thinking in primary years: Perspectives on children's learning*. Continuum.
- Bakker, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2014). First-graders' knowledge of multiplicative reasoning before formal instruction in this domain. *Contemporary Educational Psychology*, 39(1), 59–73. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2013.11.001>
- Baranes, R., Perry, M., & Stiegler, J. W. (1989). Activation of real-world knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction*, 6(4), 287–318. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0604_1
- Barmby, P., Bolden, D., Raine, S., & Thompson, L. (2011). Assessing young children's understanding of multiplication. In C. Smith (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 31(3), 1–6. British Society for Research into Learning Mathematics.
- Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 217–241. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9145-1>

- Baroody, A. J. (2006). Why Children Have Difficulties Mastering the Basic Number Combinations and How to Help Them. *Teaching Children Mathematics*, 13(1), 22–31. <http://www.jstor.org/stable/41198838>
- Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volume measurement. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 Yearbook* (pp. 122–142). National Council of Teachers of Mathematics.
- Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Van Auken Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503–532. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.29.5.0503>
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2015). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction* (2nd ed.). Heinemann.
- Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 41–51. <https://doi.org/10.2307/749196>
- Downton, A., & Sullivan, P. (2017). Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 303–328.
- Fischbein, E., Deri, M., Sainati Nello, M., & Sciolis Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3–17. <https://doi.org/10.2307/748969>
- Fuson, K. (2003). Toward computational fluency in multidigit multiplication and division. *Teaching Children Mathematics*, 9, 300–305.
- Götze, D., & Baiker, A. (2021). Language-responsive support for multiplicative thinking as unitizing: Results of an intervention study in the second grade. *ZDM – Mathematics Education*, 53(2), 263–275. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01206-1>
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155–177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). Macmillan Publishing Company.
- Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, 28(4), 383–432. <https://doi.org/10.1080/07370008.2010.511565>
- Harries, T., & Barmby, P. (2007). Representing and understanding multiplication. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 33–45. <https://doi.org/10.1080/14794800008520169>
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). Macmillan Publishing Company.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2), 98–122. <https://doi.org/10.2307/749496>
- Jacob, L., & Mulligan, J. (2014). Using arrays to build towards multiplicative thinking in the early years. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 19(1), 35–40. <https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.231859877971648>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press.
- Kosko, K. (2020). The multiplicative meaning conveyed by visual representations. *Journal of Mathematical Behavior*, 60, 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100800>

- Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 147–158. <https://doi.org/10.2307/749279>
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–668). Information Age Publishing.
- Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 309–331. <https://doi.org/10.2307/749783>
- Norton, A., Boyce, S., Phillips, N., Anwyll, T., Ulrich, C., & Wilkins, J. L. M. (2015). A written instrument for assessing students' units coordination structures. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 10(2), 111–136. <https://doi.org/10.29333/iejme/295>
- Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Blackwell.
- Pravilnik o nastavnom planu i programu za drugi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja* (2018–2023). Službeni glasnik RS – Prosvetni glasnik, br. 16/2018-47, 3/2019-1, 5/2021-1, 13/2023-457.
- Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 347–395.
- Siegler, R. S. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology: General*, 117(3), 258–275. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.117.3.258>
- Siemon, D., Beswick, K., Brady, K., Clark, J., Faragher, R. and Warren, E. (2011). *Teaching mathematics: Foundations to middle years*. Oxford University Press.
- Siemon, D., Breed, M., & Virgona, J. (2005). From additive to multiplicative thinking - The big challenge of the middle years. In J. Mousley, L. Bragg, & C. Campbell (Eds.), *Mathematics - Celebrating Achievement, Proceedings of the 42nd Conference of the Mathematical Association of Victoria* (pp. 278–286). MAV.
- Steel, S., & Funnell, E. (2001). Learning multiplication facts: A study of children taught by discovery methods in England. *Journal of Experimental Child Psychology*, 79(1), 37–55. <https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2579>
- Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3–39). State University of New York Press.
- Tzur, R., Johnson, H. L., Norton, A., Davis, A., Wang, X., Ferrara, M., Harrington, C., & Hodkowski, N. M. (2021). Children's spontaneous additive strategy relates to multiplicative reasoning. *Cognition and Instruction*, 39(4), 451–476. <https://doi.org/10.1080/07370008.2021.1896521>
- Van de Walle, J. A. (2006). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (6th ed.). Allyn & Bacon.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127–174). Academic Press.
- Young-Loveridge, J. (2005). Fostering multiplicative thinking using array-based materials. *The Australian Mathematics Teacher*, 61, 34–40. <https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.172050577621250>
- Zeljić, M., Dabić Boričić, M., & Đokić, O. (2019). Multiplication strategies: Progressive development and (or) systematic teaching. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Opportunities in*

Learning and Teaching Elementary Mathematics (pp. 418–427). Charles University, Faculty of Education.

Zeljić, M. i Dabić Boričić, M. (2020). Udžbenik u funkciji razvoja multiplikativnog mišljenja. [A textbook for the development of multiplicative thinking]. U Z. Opačić i G. Zeljić (ur.), *Programske (re)forme u obrazovanju i vaspitanju – izazovi i perspektive* (str. 393–405). Beograd, Učiteljski fakultet.

Zeljić, M., Veselinović, I., & Boričić, M. D. (2025). Developing strategic flexibility in multiplication: The role of different teaching approaches. *Thinking Skills and Creativity*, 60, 102111. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2025.102111>

Прилози

Прилог 1

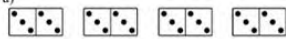
Задаци коришћени у истраживању

1. Допунј одговарајући број цветова тако да дата слика приказује израз $5 \cdot 4$.



2. Напиши одговарајући израз и одреди колика је укупна вредност приказана на слици.

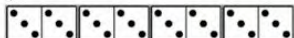
а)



б)



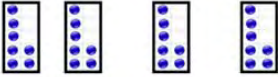
в)



3. На које све начине можемо одредити укупан број лопти? Напиши одговарајући израз.



4. а) Израчунај укупан број плавих кругова. Напиши одговарајући израз.



б) Израчунај укупан број црвених кругова. Напиши одговарајући израз.



Visual representations as support for the development of multiplicative thinking

Ivana Z. Veselinović*

Primary School „Branko Radičević“, Belgrade

Marijana Ž. Zeljić*

University of Belgrade, Faculty of Education

Milana M. Dabić Boričić*

University of Belgrade, Faculty of Education

ABSTRACT

The development of multiplicative thinking represents one of the key steps in the mathematical education of early primary school students. The aim of this study was to examine the impact of different instructional approaches on students' achievement and their choice of strategies when solving visually represented multiplication tasks. The study was conducted on a sample of 89 second-grade primary school students, who were divided into two experimental groups and one control group. In the first experimental group, instruction was organized through a combination of visual representations and arithmetic rules, while in the second group the use of representations was linked to tasks of different semantic structures. The control group learned multiplication through an approach based on the equal groups model and repeated addition. The results indicate a statistically significant greater improvement in the experimental groups compared to the control group, as well as a higher prevalence of more efficient multiplicative strategies. In particular, rectangular arrays and decade-based representations stand out, as their use supports the development of flexible multiplication strategies.

Keywords: *multiplicative thinking, visual representations, multiplication strategies, primary school mathematics.*

Introduction

Multiplicative reasoning is a key component of primary school students' mathematical thinking, both in the early and later years of schooling (Norton et al., 2015). Research in mathematics education consistently shows that the development of multiplicative thinking is not based only on the acquisition of computational procedures and mastery of the multiplication table, but on understanding the multiple meanings of multiplication in different multiplicative situations (Greer, 1992; Siemon et al., 2005;

* ivanaveselinovic94@gmail.com

* marijana.zeljic@uf.bg.ac.rs, <https://orcid.org/0000-0002-0735-9847>

* milana.dabic@uf.bg.ac.rs, <https://orcid.org/0000-0003-3168-4161>

Vergnaud, 1983). Although repeated addition often remains an “implicit, unconscious, and primitive model” for multiplication (Fischbein et al., 1985), scholars emphasize that the repeated-addition model is incomplete and that a significant qualitative change is needed in order to provide a basis for multiplicative thinking (Greer, 1992). Limited exposure of students to only one type of situation (e.g., equal groups) may lead to a reduced understanding of multiplication and reliance on additive strategies (Barmby et al., 2009; Kosko, 2020; Zeljic et al., 2025). In this context, visual representations play a key role because they make the structure of relationships between quantities visible and support the transition from additive to multiplicative thinking (Battista, 2003; Steffe, 1994). Research shows that the use of diverse, structurally meaningful visual representations in different multiplicative contexts supports flexibility in thinking and a deeper understanding of multiplication as an operation, not only as repeated addition (Barmby et al., 2009; Fuson, 2003; Van de Walle, 2006; Zeljic et al., 2025).

Theoretical Framework

Multiplicative thinking: from strategies to relational understanding

The application of flexible multiplication strategies is an important characteristic of multiplicative thinking. A number of authors emphasize the importance of using tasks with different semantic structures, as well as the view that the development of intuitive multiplication strategies is conditioned by the semantic structure of the problems being solved (Greer, 1992; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Anghileri, 1989; Downton & Sullivan, 2017).

This is also supported by the results of numerous studies showing that children possess intuitive knowledge and can solve multiplication tasks before this operation is formally introduced (Downton & Sullivan, 2017; Greer, 1992; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Downton and Sullivan (2017) emphasize that encouraging students to engage with more complex tasks prompts the use of sophisticated strategies. Several different classifications of strategies can be found in the literature (Table 1).

Table 1
Classification of multiplication strategies

Authors	Strategies
Mulligan & Mitchelmore (1997)	• Direct counting (counting without considering multiplicative structure) • Rhythmic counting (counting that follows the structure of the problem, e.g., 1, 2; 3, 4; 5, 6) • Skip counting (counting in groups, e.g., 2, 4, 6, ...) • Additive calculation (e.g., $2 + 2 = 4$, $4 + 2 = 6$) • Multiplicative calculation (using learned or derived multiplication facts: $6 \times 6 = 36$, or if $5 \times 6 = 30$, then another 6 is added to 5×6)

Authors	Strategies
Sherin & Fuson (2005)	• “Count all” and “count by” strategies (different types of counting) • Additive calculation (repeated addition: $2 + 2 = 4$, $4 + 2 = 6$; as well as combining groups and adding: $4 \times 8 = 16 + 16$) • Pattern-based strategies (e.g., the “tens rule” or the “nine-finger rule”) • Learned products (rote memorization, without visible calculation) • Hybrid strategies (combinations of the listed strategies)
Downton & Sullivan (2017)	• Transitional counting (visualization of groups using representations, e.g., fingers or drawings) • Progressive construction: double counting and counting by multiples (relying on skip counting or a combination of skip counting and doubling) • Doubling and halving ($7 \times 8 = 56$ because $7 \times 2 = 14$, $14 + 14 = 28$, $28 + 28 = 56$) • Multiplicative calculation (according to the definition by Mulligan and Mitchelmore, 1997) • Holistic thinking (decomposing numbers using the distributive property, grouping and/or estimating using known products)

Steel and Funnell (2001) emphasize that the progression from less efficient strategies to efficient strategies does not necessarily occur if special attention is not devoted to their development. Students most often apply the strategy that they perceive as a familiar algorithm and with which they feel more certain they will succeed (Baranes et al., 1989), or because they believe that this is precisely what is expected of them. Multiplicative reasoning can also be considered through schema theory. According to this theory, the basis of multiplicative thinking is units coordination, which describes students' ability to construct and operate with different levels of composite units (units composed of units) and to apply these structures in problem solving (Hackenberg, 2010; Kosko, 2020; Steffe, 1994; Tzur et al., 2021). Three multiplicative concepts have been defined (Hackenberg, 2010; Kosko, 2020), the lowest of which involves anticipating one level of units (e.g., in the situation 4×6 , a student can perceive four sixes), while the highest involves students being able to anticipate three levels of units (e.g., in the previous example, a student can perceive 12×6 as $4 \times 6 + 8 \times 6$, but also as $10 \times 6 + 2 \times 6$). According to this theory, additive and multiplicative reasoning do not differ in terms of the operations performed, but in terms of the schemas that the student constructs. Additive reasoning involves operating with units (counting by ones), whereas multiplicative reasoning includes the coordination of multiple levels of units – the ability to understand groups as new units and to anticipate and use them in operations (Kosko, 2020).

The role of representations in developing multiplicative thinking

Understanding multiplication does not involve only the acquisition of a new arithmetic operation, but also a qualitative change in the way students think about numbers, quantities, and units (Hiebert & Carpenter, 1992). In this context, visual representations play an important role, but only if they are structurally connected to

the mathematical meaning of the operation. The literature identifies several types of iconic representations of multiplication: equal groups, rectangular arrays and area models, and linear representations/number lines (Anghileri, 2000; Barmby et al., 2009; Battista et al., 1998; Carpenter et al., 2015; Fuson, 2003; Greer, 1992; Kosko, 2020). Equal groups are one of the basic visual representations of multiplication in early instruction, in which individual units are organized into several groups with the same number of elements. These representations have an important role in the initial understanding of the basic meaning of the multiplication operation (Anghileri, 2000; Battista et al., 1998; Greer, 1992). The use of rectangular arrays is a very useful representation for the development of multiplication strategies, because it highlights the many meanings of the multiplication operation (Anghileri, 2000; Barmby et al., 2009), and not only multiplication as repeated addition (Harries & Barmby, 2007). Students who used them more successfully recognized the properties of commutativity and distributivity, which emphasizes the importance of structured visual models in explicitly representing multiplicative relationships (Jacob & Mulligan, 2014; Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005). Furthermore, the use of rectangular arrays enables students to draw rectangular arrays independently and use them as support in calculation, as well as support for the development of personal calculation strategies (Young-Loveridge, 2005). In the context of developing conceptual understanding of multiplication, base-ten visual representations have an important role in the development of multiplicative reasoning (Fuson, 2003; Van de Walle, 2006). Base-ten representations enable students to notice the base-ten structure of a number (in the context of multiplying a two-digit number) and to treat multiplication as an operation on these structured units rather than as repeated addition (Fuson, 2003; Hiebert & Wearne, 1992). For example, decomposing a product such as 7×34 into $7 \times (30 + 4)$ becomes understandable through the spatial organization of ones and tens, and the distributive law appears as a consequence of the structure of the representation, rather than as a formal rule.

The effectiveness of representations depends primarily on whether students manage to notice and coordinate the structure of the units represented by them (Barmby et al., 2009; Kosko, 2020). In other words, representations can support the understanding of multiplication only if students recognize the relationships among elements, groups, and more complex units. Research shows that the use of different visual representations can foster a deeper understanding of multiplication and the application of more flexible calculation strategies (Downton & Sullivan, 2017), and it also influences the way students conceptualize multiplicative relationships (Kosko, 2020). However, students may use different strategies even when working with the same visual representation (Kosko, 2020). This indicates that the choice of strategy does not depend exclusively on the form of the representation, but also on the way in which the structure of units within it is highlighted and interpreted. Although multiplicative structure may seem obvious to adults, numerous studies show that children do not notice this structure spontaneously (Anghileri, 1995; Barmby et al., 2009, 2011). If students' attention during instruction is not directed toward the relationships among units, visual representations may remain at the level of support for

additive strategies, instead of encouraging the development of multiplicative reasoning (Lamon, 2007; Kosko, 2020). In this sense, the choice of strategies depends more on the way units are represented and quantified than on the form of the representation itself (Kosko, 2020). Accordingly, Gravemeijer (1999) describes visual representations as tools that gradually transform from contextual tools for problem solving into carriers of formal mathematical knowledge.

Aim and research questions

The preceding theoretical considerations point to two different approaches to the development of multiplicative thinking and multiplication strategies, which constituted the starting point for formulating the problem of this study. One group of authors holds that students should become familiar with arithmetic rules whose explicit application enables an understanding of multiplication strategies for single-digit numbers (Götze & Baiker, 2021; Fuson, 2003; Van de Walle, 2006). This approach, in which distributivity is explicitly addressed, encourages flexible operations with different composite units and thereby supports the development of the highest level of multiplicative thinking (Kosko, 2020; Norton et al., 2015). A second group of authors holds that understanding the properties of operations emerges from meaningful activities and problems, and not only from formal teaching (Carpenter et al., 2015; Nunes & Bryant, 1996; Siegler, 1988). According to this perspective, the introduction of arithmetic rules is not a prerequisite for the development of multiplication strategies; rather, such strategies can be encouraged through the use of different semantic structures of word problems (Ambrose et al., 2003; Anghileri, 1989; Bakker et al., 2014; Downton & Sullivan, 2017; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Sherin & Fuson, 2005). This study examines which of these two approaches provides a better framework for using visual representations to develop multiplication strategies. Therefore, we examine students' achievement and the use of multiplication strategies when solving tasks with different visual representations. In particular, we examine how the form and type of representation affect the understanding of a multiplicative situation and the choice of multiplication strategy.

Accordingly, the following research questions were formulated: (1) Are there differences in students' success in solving visually represented tasks depending on the instructional approach to which they were exposed? (2) Do groups of students differ in their use of task-solving strategies after the implementation of different instructional approaches? (3) In what way do the form and type of representation influence students' success in recognizing and understanding multiplicative situations, as well as their choice of multiplication strategies?

Method

A quasi-experimental design was used in the study, involving two experimental groups and one control group. The results presented in this paper are only part of the

results of a broader study. The total sample consisted of 89 students from three classes of one primary school in Belgrade, Serbia. All students were 8 or 9 years old, and the classes had been balanced at school entry by the pedagogical-psychological service. One class constituted the control group (30 students), while the remaining two classes constituted the experimental groups – the Arithmetic Rules Group (31 students) and the Semantic Structures Group (28 students). The sample was convenient, since the school in which the study was conducted collaborates with the researchers' institution.

Procedure and instruments

The study was conducted in several stages: Initial test (after one lesson on the teaching unit Multiplication. The times sign.); implementation of lessons; final test. The intervention for each group was implemented over 16 lessons during a four-week period, with all lessons taught by the same teacher, who was also one of the researchers. The time for working on the tests was not limited.

For the purpose of examining success and multiplication strategies on tasks with visual representations, an initial and a final knowledge test were constructed. Each consisted of 4 tasks. These tasks assessed students' ability to: 1) compose numerical expressions that correspond to a given representation and calculate their value; 2) apply different strategies to determine the value of a product; 3) create a representation that corresponds to a given expression. Since some tasks had several items, the total number of scored items on the test was seven. The final test was the same as the initial test, with changed numbers. The tasks are presented in the appendix (Appendix 1).

Intervention

In the second-grade mathematics curriculum in the Republic of Serbia (National curriculum, 2018-2023), the outcome related to multiplication of single-digit numbers states that the student should “multiply and divide orally within the first hundred”. In the section on the implementation of the curriculum, it is stated that multiplication is introduced as repeated addition (addition of equal addends), that various examples representing a multiplicative schema are considered (when there are m elements in each of n places), and that one of the important goals is memorization of the multiplication and division tables up to 100. Although the Serbian curriculum implicitly allows the use of flexible calculation strategies by introducing appropriate arithmetic rules, the emphasis on the approach to multiplication as the sum of equal addends is reflected in methodological approaches in textbooks, in the sense that textbooks do not support the development of flexible multiplication strategies and the understanding of different multiplicative situations (Zeljić & Dabić Boričić, 2020). Therefore, our study compares achievement in multiplication and strategy use among three groups of students. The first group (Arithmetic Rules Group) was taught multiplication strategies based on arithmetic rules with the systematic use of different visual representations. The second group (Semantic Structures of Tasks Group) learned

multiplication through the use of different visual representations in combination with word problems of different semantic structures. The third group, which served as the control group, received instruction based on the equal-groups model and repeated addition.

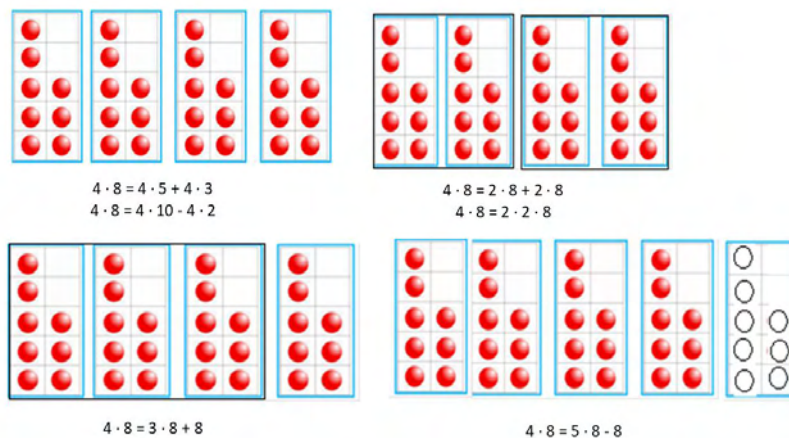
Arithmetic Rules Group

In this group, instruction on multiplication of single-digit numbers was based on the consistent application of arithmetic rules, with representations used primarily as a basis for expressing meaning and applying the rules. First, students learned multiplication by 2, 5, and 10, and then arithmetic rules (commutativity, associativity, and distributivity) were introduced using didactically adapted names and different forms of representations.

The arithmetic rules that students acquired served as the basis for introducing multiplication by the remaining single-digit numbers. Each time, students were reminded to apply the arithmetic rule they had previously learned. Students were then encouraged to use different multiplication strategies based on the representation (Figure 1), and they explained their procedures as the application of specific arithmetic rules.

Figure 1

Example of using base-ten representations



The examples were further varied by using representations of rectangular arrays (such as those mentioned above) and domino representations. At the beginning of instruction, students used visual representations as support for understanding the rules and their application, while later they performed calculations without using representations.

Semantic Structures Group

The main difference in relation to the instructional approach applied in the Arithmetic Rules Group was that students in the Semantic Structures Group were not explicitly taught arithmetic rules. Instead, they applied these rules implicitly, relying on the structures of visual representations and the semantic structures of the word problems they solved. Representations of rectangular arrays, base-ten representations, and equal groups (domino representations) were used, and calculation strategies were encouraged through their different structures and diverse grouping of composite units (Figure 1). In addition, students solved word problems with different semantic structures (equal groups, multiplicative comparison, Cartesian product, rectangular arrays, measurement relationships). Arithmetic rules were formally introduced only in the final phase of instruction on multiplication of single-digit numbers and were not used as the basis for learning multiplication, unlike in the Arithmetic Rules Group. The rules were explained through generalizations based on realistic situations, similarly to the Arithmetic Rules Group.

Control Group

In the Control Group, multiplication of single-digit numbers was learned through an additive approach. This instructional model is based on the national curriculum and supported by the textbook used by the students. Multiplication was primarily represented through the equal-groups model, while other meanings of multiplication were minimally represented. This approach integrates additive and multiplicative thinking and emphasizes the conceptual difference between situations of the type “ m groups of n elements”. Determining the product of two numbers was based on repeated addition; for example, $3 \times 6 = 6 + 6 + 6$. Although the rules of commutativity and associative grouping were taught, students in this group did not learn multiplication of a sum or difference by a number (the distributive property) during instruction on multiplication of single-digit numbers. Commutativity was introduced using a rectangular array, but its application was limited to supporting multiplication through the addition of equal addends (e.g., it is easier to calculate 2×6 as $6 + 6$ than 6×2 as the sum of six twos). Similarly, associativity was introduced through a contextual example, but solely with the aim of showing that three factors can be multiplied in different orders (e.g., $2 \times (5 \times 3) = (2 \times 5) \times 3$). Although students understood these rules and could apply them to numbers, they were not used in subsequent instruction as a basis for calculation strategies, which means that their operational use was absent. The rule of multiplying a sum by a number (following the textbook as the basis for designing the operational plan) was not introduced within the topic of multiplication of single-digit numbers.

Data analysis plan

Each requirement (item) on the knowledge test (Appendix 1) was scored with 2 points if the student wrote a multiplication expression, with 1 point if the student

wrote an addition expression, and with 0 points if the student did not write an expression or arrived at the answer by counting. We will present the metric characteristics of the test and then compare group achievement using one-way ANOVA for the initial test and ANCOVA for the final test. To analyze the use of strategies (the second research question), three researchers independently reviewed each test, exchanged their reports on categories, and reached consensus on the final list of categories:

- Counting (as described in Mulligan & Mitchelmore, 1997 and Sherin & Fuson, 2005);
- Repeated addition, e.g., $2 + 2 + 2 = 6$ (Sherin & Fuson, 2005);
- Doubling, e.g., $7 \times 8 = 56$, based on doubling: double 7 is 14, then $14 + 14 = 28$, and $28 + 28 = 56$ (Downton & Sullivan, 2017);
- Learned products, i.e., direct recall of multiplication facts without visible calculation (Sherin & Fuson, 2005);
- Multiplicative strategies, i.e., decomposing numbers using the distributive property, associativity, and/or estimation, i.e., using known (“easy”) products to calculate the value of an unknown product (Downton & Sullivan, 2017).

To answer the question of the influence of the form and type of representation on students' success and multiplication strategies, we will analyze item difficulty indices and the distribution of strategies in the whole sample. To analyze differences in the distributions of strategy use, we used the chi-square test. The data were analyzed in SPSS.

Results

Descriptive indicators of achievement (M – arithmetic mean, Md – median, SD – standard deviation, Min, Max, Max% – percentage of students with the maximum number of points) for the total score on the initial and final tests are presented in Table 2.

Table 2
Descriptive indicators of achievement by group on the initial and final tests

Test	Control Group		Arithmetic Rules Group		Semantic Structures Group	
	Initial	Final	Initial	Final	Initial	Final
M	6,60	5,90	8,97	11,29	8,96	12,07
Md	6,00	6,00	9,00	14,00	10,00	14,00
SD	3,95	4,72	3,81	4,20	3,95	3,34
Min	0	0	1	0	0	2
Max	14	14	14	14	14	14
Max%	6,7%	6,7%	19,4%	54,8%	14,3%	64,3%

Scores on the initial test showed moderate reliability measured by Cronbach's alpha coefficient ($\alpha = .76$), with a standard error of measurement $SEM \approx 0.95$, while high reliability was recorded on the posttest ($\alpha = .90$), with a lower measurement error

(SEM $\approx$ 1.54). A pronounced ceiling effect was observed on the final test, since a significant percentage of students in the experimental groups achieved the maximum score (14/14), indicating limited discriminativeness of the test in the upper part of the scale after the intervention and requiring caution in interpreting achievement differences on the final test. Item analysis (r – corrected item-total correlation, α_{del} – alpha coefficient if the item is deleted, p – difficulty index, calculated as half of the arithmetic mean) on the initial and final tests is presented in Table 3.

Table 3
Item analysis on the initial (Pre) and final test (Post)

Item	Test	1)	2a)	2b)	2v)	3)	4a)	4b)
M	Pre	1.12	1.03	0.89	0.99	1.33	1.37	1.44
	Post	1.10	1.45	1.19	1.16	1.65	1.63	1.54
SD	Pre	1.00	0.88	0.91	0.90	0.88	0.84	0.82
	Post	1.00	0.89	0.96	0.96	0.74	0.77	0.84
r	Pre	.39	.52	.51	.59	.28	.56	.57
	Post	.53	.76	.82	.82	.68	.66	.77
α_{del}	Pre	.76	.73	.73	.71	.78	.72	.72
	Post	.91	.88	.88	.88	.89	.90	.88
p	Pre	.560	.515	.445	.495	.665	.685	.720
	Post	.550	.725	.595	.580	.825	.815	.770

On the initial test, item difficulty indices ranged from $p = .445$ to $p = .720$, with moderate discriminativeness (corrected item-total correlation from $r = .28$ to $r = .59$). Item 3 had the lowest discriminativeness, and deleting this item would slightly increase the reliability of the scale. On the final test, an increase in the difficulty indices of most items was observed (from $p = .550$ to $p = .825$), as well as markedly better discriminative characteristics ($r = .53$ to $r = .82$), which is consistent with higher internal consistency on the final test. At the same time, the highest difficulty-index values on items 3 and 4a indicate that these items were very easy on the final test and probably contributed to the observed ceiling effect at the level of the total score.

One-way ANOVA was used to examine differences among the groups on the initial test. The assumption of homogeneity of variances was met (Levene $p = .937$). The test showed statistically significant differences in achievement on the initial test among the three groups, $F(2, 86) = 3.66$, $p = .030$ ($\eta^2 \approx 0.08$), with post hoc comparisons (Tukey) showing that the control group had lower achievement than both experimental groups (borderline significant: $p = .052$ and $p = .060$), while the experimental groups did not differ ($p > .05$). Given the initial differences in achievement, ANCOVA was applied to compare the groups on the final test, with the final-test score as the dependent variable and the initial-test score as the covariate. The assumption of homogeneity of regression slopes was met, because the interaction between group and initial score was not statistically significant, $F(2, 85) = .38$, $p = .682$, $\eta^2 = .01$. Therefore, a standard ANCOVA was conducted with the initial-test score as a covariate. The results showed a significant effect of the covariate ($F(2, 85) = 13.77$, $p < .001$, $\eta^2 = .14$), indicating that

initial achievement was significantly related to success on the final test. After controlling for the initial test, a statistically significant effect of group was also found ($F(2, 85) = 14.56, p < .001, \eta^2 = .26$), meaning that the control group and the two experimental groups differed in achievement on the final test independently of the initial level of knowledge. The control group had a significantly lower adjusted mean than both experimental groups (Table 4). Post hoc comparisons of adjusted means showed that the control group achieved statistically significantly lower results on the final test than the Arithmetic Rules Group ($p < .001$) and the Semantic Structures Group ($p < .001$). In contrast, the difference between the two experimental groups was not statistically significant ($p > .05$), indicating that, after controlling for initial achievement, the two implemented interventions led to comparable effects on the final test.

Table 4

Adjusted means (M_{adj}), standard error (SE), and 95% confidence interval (95% CI) for success on the final test

	M_{adj}	SE	95% CI
Control Group	6.52	.73	[5.08, 7.96]
Arithmetic Rules Group	10.97	.70	[9.58, 12.36]
Semantic Structures Group	11.76	.74	[10.29, 13.22]

Note. Calculated for the covariate value at the sample mean level, 8.17.

Frequencies and percentages of the use of different strategies on the tests are presented in Table 5. The results of the chi-square test show that the groups differed in the distribution of strategy use on the initial test $\chi^2(410, 8) = 55.06, p < .01$, CramerV = .26, and on the final test $\chi^2(407, 8) = 109.91, p < .01$, CramerV = .37.

Table 5

Frequencies and percentages of strategies on the initial (pre) and final (post) tests

Strategy	Control Group		Arithmetic Rules Group		Semantic Structures Group	
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
Counting	60 48.0%	11 11.3%	21 13.6%	3 1.9%	32 24.4%	3 2.0%
Repeated addition	64 51.2%	11 11.3%	109 70.8%	17 10.8%	81 61.8%	11 7.2%
Doubling	1 0.8%	9 9.3%	22 14.3%	54 34.2%	14 10.7%	56 36.8%
Multiplication table	0 0.0%	52 53.6%	0 0.0%	22 13.9%	2 1.5%	15 9.9%
Multiplicative strategies	0 0.0%	14 14.4%	2 1.3%	62 39.2%	2 1.5%	67 44.1%

To reveal the influence of the form and type of representation on students' choice of strategies, we present strategy use in the total sample (Table 6). The requirement in the first task is to complete the picture (Appendix 1), so this task was not used when examining the use of strategies.

Table 6
Frequency and percentage of strategy use on each task

Strategy	Test	2a)	2b)	2v)	3)	4a)	4b)	Total
Counting	Pre	12	13	25	17	24	22	113
		10.6%	11.5%	22.1%	15.0%	21.2%	19.5%	100%
	Post	5	1	2	3	3	3	17
Repeated addition	Pre	29.4%	5.9%	11.8%	17.6%	17.6%	17.6%	100%
		47	24	37	53	45	48	254
	Post	18.5%	9.4%	14.6%	20.9%	17.7%	18.9%	100%
Doubling	Pre	1	15	8	6	5	4	39
		2.6%	38.5%	20.5%	15.4%	12.8%	10.3%	100%
	Post	4	19	2	0	7	5	37
Multiplication table	Pre	10.8%	51.4%	5.4%	0.0%	18.9%	13.5%	100%
		27	17	34	31	6	4	119
	Post	22.7%	14.3%	28.6%	26.1%	5.0%	3.4%	100%
Multiplicative strategies	Pre	0	0	0	0	1	1	2
		0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	50.0%	50.0%	100%
	Post	33	11	4	13	16	12	89
	Pre	37.1%	12.4%	4.5%	14.6%	18.0%	13.5%	100%
		0	0	0	1	1	2	4
	Post	0.0%	0.0%	0.0%	25.0%	25.0%	50.0%	100%
	Pre	4	12	7	26	45	49	143
		2.8%	8.4%	4.9%	18.2%	31.5%	34.3%	100%
	Post							

Discussion

The results of the study show that different instructional approaches to multiplication affect students' success in solving visually represented multiplicative tasks, that is, their understanding of different multiplicative representations. After controlling for initial achievement, the analysis of covariance showed that students in both experimental groups achieved statistically significantly better results on the final test than the control group, while the difference between the two experimental groups was not statistically significant. Therefore, regardless of whether students were taught using arithmetic rules or semantic structures, systematic work with different representations of multiplication contributed to students' greater success in solving visually represented multiplicative tasks. These results confirm the view that instruction focused exclusively on the equal-groups model does not enable students to develop the breadth of meanings of multiplication (Anghileri, 2000; Barmby et al., 2009; Gravemeijer, 1999; Hackenberg, 2010; Kosko, 2020; Steffe, 1994; Tzur et al., 2021), but rather encourages a limited understanding of multiplication as repeated addition. Within such a conceptual framework, students often fail to recognize multiplicative structure in new contexts or visual representations, which may lead to lower achievement on tasks that require more flexible understanding (Kosko, 2020; Lamon, 2007).

A particularly important finding concerns the dynamics of achievement within the control group. Descriptive indicators show that students in the control group did

not make progress during the intervention period; on the contrary, their average result on the final test was somewhat lower than on the initial test (Table 2). This result indicates not only the absence of a positive effect of the applied approach, but also possible stagnation or regression in the understanding of multiplicative relationships. The results of the control group show insufficiently developed understanding of multiplicative situations, which may also be a consequence of the overemphasis on additive thinking in instruction (Clark & Kamii, 1996; Greer, 1992), from which students find it difficult to move away if it is dominantly represented. These results also confirm that students do not spontaneously notice multiplicative structure (Anghileri, 1995; Barmby et al., 2009; Barmby et al., 2011). On the other hand, exposing students to different contexts enables them to form a network of connected meanings and to recognize the common structure in different representations of the same situation (Downton & Sullivan, 2017; Fuson, 2003; Siemon et al., 2005; Van de Walle, 2006). This finding supports the view that visual models function as carriers of the meaning of the multiplication operation, because they enable the coordination of multiple levels of units and the linking of symbolic notation with the meaning of the representation of a multiplicative situation (Anghileri, 2000; Hiebert & Carpenter, 1992; Kosko, 2020; Mulligan & Mitchelmore, 1997).

The second research task concerned the examination of the influence of the way in which multiplication of single-digit numbers is taught on the development of flexible multiplication strategies. The results of the study indicate significant changes in students' multiplication strategies between the initial and final testing. On the initial test, counting and repeated addition strategies dominated in all groups, indicating limited multiplicative understanding and reliance on the conception of multiplication as "shortened" addition. This finding is consistent with the view that the development of multiplicative thinking represents a gradual transition from additive to relational understanding of relationships between quantities (Greer, 1992; Siemon et al., 2005). On the final test, a significant decrease in the use of these strategies and an increase in the use of multiplication-table knowledge and more flexible multiplication strategies were observed. Thus, regardless of the teaching model, students will manage to master multiplication of single-digit numbers to a similar extent. However, Kilpatrick (2001) emphasized the importance of learning procedures and calculation strategies with understanding, because acquiring them without understanding leads to difficulties in calculations with multi-digit numbers (Zeljic et al., 2025). Students in the control group did not show a strong increase in flexible multiplicative strategies. The control group most often relied on learned products to determine the product of two numbers (53.6% of the strategies used), significantly more than the Arithmetic Rules Group (13.9%) and the Semantic Structures Group (9.9%). Students in the control group also often used repeated addition and counting (11.3% each). The dominant use of factual knowledge and the absence of efficient strategies indicate that students learned multiplication facts by heart and that their thinking remained additive in nature (Baroody, 2006; Steel & Funnell, 2001; Zeljic et al., 2019; Zeljic et al., 2025). In other words, instruction based on equal groups and repeated addition enables the use of counting, repeated addition, and memorization of products, but does not encourage the transition to higher levels of unit coordination and, consequently, to higher levels of

multiplicative reasoning (Hackenberg, 2010; Steffe, 1994). Regardless of the efficiency of a strategy, students resorted to the strategies in which they felt most secure (Baranes et al., 1989). Although such knowledge enables efficient task solving, it does not necessarily imply understanding different multiplicative situations or the ability to choose a strategy depending on the context (Greer, 1992; Siemon et al., 2005). Our results confirm the view that, without systematic support through different representations and activities, students less frequently develop more sophisticated forms of multiplicative reasoning spontaneously (Steel & Funnell, 2001). By contrast, in the experimental groups a pronounced increase was observed in doubling strategies and multiplicative strategies, with less reliance on purely memorized multiplication-table knowledge. The results show that the use of different representations also encourages the application of holistic strategies (Battista, 2003; Downton & Sullivan, 2017; Hackenberg, 2010; Jacob & Mulligan, 2014; Kosko, 2020; Siemon et al., 2011; Steffe, 1994; Tzur et al., 2021), as well as shaping the way students conceptualize multiplicative relationships (Kosko, 2020). Work with diverse representations can encourage the construction of multiplication strategies without direct reliance on formal arithmetic rules, which is consistent with studies showing that strategies can be developed through meaningful activities and problem solving (Downton & Sullivan, 2017; Mulligan & Mitchelmore, 1997). The results also show that younger children are capable of understanding the properties of operations when these are grounded in meaningful activities and problems (Carpenter et al., 2015; Nunes & Bryant, 1996), as well as applying them as a basis for flexible strategies (Götze & Baiker, 2021; Fuson, 2003; Van de Walle, 2006).

The next research question concerned the influence of the form of representation on the development of multiplicative thinking and multiplication strategies. The results of the study show that the form and type of representation have a significant influence on both students' success and their choice of multiplication strategies, which is contrary to the results reported by Kosko (2020). The first task on the test required students to complete a partially started rectangular array on the basis of a given expression. Research shows that the ability to construct a rectangular representation independently is an indicator of more developed multiplicative thinking (Gravemeijer, 1999; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Young-Loveridge, 2005), which enables the application of different strategies. The value of the difficulty index for this task indicates moderate success, both on the initial test ($p = .560$) and on the final test ($p = .550$). This result points to the need for further work on developing students' multiplicative thinking. The relatively low success may be partly explained by students' limited experience, especially in the control group, with rectangular arrays in instruction.

The second task was based on the equal-groups model, but the same situation was represented through different structuring of composite units: as 6×4 , but also as $2 \times 4 + 2 \times 4 + 2 \times 4$ and $3 \times 4 + 3 \times 4$. The greatest difficulties occur in tasks 2b and 2v (difficulty indices on the initial test $p = .515$ and $p = .445$, respectively), where the structure is represented as the sum of partial products. Students must notice that several composite units can represent the same quantity as a single product, which requires a higher level of conceptual understanding. According to the theory of units

coordination, the ability to construct and coordinate composite units represents the basis of multiplicative thinking (Hackenberg, 2010; Kosko, 2020; Steffe, 1994). These results indicate that students often experience a multiplicative situation as a fixed structure rather than as a relationship that can be reorganized (Lamon, 2007; Kosko, 2020). On the third task with a rectangular array, students showed better achievement ($p = .825$), especially on the final test. This supports the views that the use of rectangular arrays supports understanding of commutativity and distributivity and encourages the use of flexible multiplication strategies (Anghileri, 2000; Harries & Barmby, 2007; Young-Loveridge, 2005). In terms of schema theory, they facilitate the transition toward higher multiplicative concepts. The greatest success on the initial test was recorded on tasks with base-ten representations (the fourth task, $p = .685$ and $p = .720$) and success on this task was also high on the final test ($p = .815$ and $p = .770$, respectively). The spatial organization of tens and ones enables students to view multiplication as an operation on structured units, rather than as repeated addition (Fuson, 2003; Hiebert & Wearne, 1992; Kosko, 2020; Tzur et al., 2021).

The largest number of strategies that students used intuitively before systematic instruction in multiplication were counting and repeated addition (113 and 254 strategies, respectively). A significant increase in the doubling strategy in task 2b on the initial test (51.4% of the use of the doubling strategy occurred on this task) indicates the development of the ability to work with more complex units (Hackenberg, 2010; Kosko, 2020). On the other hand, on the final test there was a noticeable increase in the use of multiplicative strategies on tasks with rectangular and base-ten representations – of the 143 multiplicative strategies used, 84% were used on the third and fourth tasks. These results partially confirm the view that the choice of strategies depends more on the way the unit is represented and quantified than on the form of the representation itself (Kosko, 2020).

Among the limitations of the study, it may be noted that the research was conducted on a convenience sample of students from one school institution, with the results interpreted within the instructional context and the current curriculum. In addition, the number of tasks for individual types of visual representations was limited, which was conditioned by the scope of the broader study, while this paper presents selected parts of the overall research material.

Conclusion

The results of the study show that students' success in solving visually represented multiplication tasks depends to a significant extent on the instructional model that was applied, with the form of representation also emerging as an important factor. The Control Group, which learned multiplication primarily through the equal-groups model and repeated addition, did not show progress on the final test; rather, it achieved somewhat lower results than on the initial measurement. The formal introduction of arithmetic rules in instruction will not lead to their operational application without the use of representations and problems that are carriers of the meaning of rules and calculation procedures. Our results show that the additive approach,

although important in the early phase and dominantly emphasized in our curriculum and textbooks, is not sufficient for the development of multiplicative thinking.

Overall, the results of this study have important implications for the design of multiplication instruction in early mathematics education. They indicate that the development of multiplicative thinking requires instruction that goes beyond the repeated-addition model and systematically includes work with different representations, semantic structures of tasks, and arithmetic rules as carriers of mathematical meaning. The results particularly point to the need for greater representation of base-ten representations in instructional practice and textbook materials, since they support the understanding of multiplication as an operation on structured units and encourage the development of more flexible multiplicative strategies. Nevertheless, in practice they are often insufficiently represented in early multiplication instruction, as well as in studies examining the role of representations in understanding multiplication of single-digit numbers.

Appendix

Appendix 1

Tasks used in the research

- 1 Draw the appropriate number of flowers so that the picture shows the expression $5 \cdot 4$.



- 2 Write the appropriate expression and determine the total value shown in the figure.

a)



b)



c)



- 3 In what ways can we determine the total number of balls? Write the corresponding expression.



4. a) Calculate the total number of blue circles. Write the corresponding expression.



- b) Calculate the total number of red circles. Write the corresponding expression.

